JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ | JKU

TNF

Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

# Neue Medien im Mathematikunterricht am Beispiel Vektorrechnung in der Ebene

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

im Diplomstudium

LEHRAMT FÜR MATHEMATIK UND BILDNERISCHE ERZIEHUNG

Eingereicht von:
Ramona Weilhartner

Angefertigt am:
Institut für Didaktik der Mathematik

Beurteilung:
Univ.-Prof. DI Mag. Dr. Markus Hohenwarter

Linz, Mai 2011

## Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

..... .....

Ort, Datum Ramona Weilhartner

# Vorwort

Ein spannendes und interessantes Thema für die Diplomarbeit zu finden, war für mich eine große Herausforderung. Die Suche gestaltete sich als langwierige und schwierige Aufgabe, weil ich ein mathematisches Thema so bearbeiten und mich damit auseinandersetzen wollte, dass es mir in meinem späteren Berufsleben als Pädagogin hilfreich sein kann. Mein Ziel war, aus der wissenschaftlichen Aufarbeitung des ausgewählten Themas so viel Nutzen wie möglich für meine zukünftige unterrichtende Tätigkeit zu ziehen.

Nachdem ich in meiner eigenen Schullaufbahn die Vektorrechnung nicht kennen gelernt habe und eine Auseinandersetzung mit der Thematik auf schulischer Ebene nie stattgefunden hat, habe ich die Vektorrechnung als Thema meiner Diplomarbeit gewählt.

Dieses Vorhaben schilderte ich Herrn Prof. Markus Hohenwarter, welcher mir angeboten hat, beim Projekt „Medienvielfalt und Genderaspekte im Mathematikunterricht -Let's do IT!“ mitzuwirken. Im Zuge dieses Projekts werden zahlreiche, in den Jahren 2004 bis 2009 entwickelte, computerunterstützte Lernmaterialien zu unterschiedlichen Themenbereichen der Mathematik für den Schulunterricht überarbeitet. Bei diesen Lernmaterialien handelt es sich vorrangig um Lernpfade, die eine Aneinanderreihung von einzelnen Lernsequenzen zu bestimmten Themen darstellen (genaue Erklärung siehe Kapitel 3).

Herr Prof. Markus Hohenwarter empfahl mir aufgrund meines Interesses an der Vektorrechnung, den Lernpfad „Vektorrechnung in der Ebene Teil 1“ zu überarbeiten. Somit hatte ich auch die Möglichkeit, mich mit dem Thema „neue Medien im Mathematikunterricht“ in meiner Diplomarbeit auseinanderzusetzen.

## Dank

Während des Studiums und der Erstellung dieser Diplomarbeit haben mich viele Menschen begleitet und unterstützt. Ich möchte hier die Gelegenheit nützen und mich ganz herzlich bedanken.

Besonderer Dank gilt meinem Diplomarbeitsbetreuer Herrn Prof. DI Hohenwarter, der mich stets bei der Fertigung dieser Arbeit hervorragend unterstützt hat.

Außerdem möchte ich mich bei meiner Familie, besonders meiner Mutter Irmgard Weilhartner, und meinen StudienkollegInnen und FreundInnen bedanken, die mir während des Studiums stets zur Seite gestanden sind und mich mit Rat und Tat unterstützt haben. Meinem Lebensgefährten Peter Dornetshumer möchte ich hiermit ebenfalls meinen Dank aussprechen für die immer wieder aufbauenden Worte in mühevollen und schwierigen Phasen meines Studiums und das Vertrauen in mich und mein Können.

Zuletzt möchte ich mich bei Frau Mag. (FH) Ingrid Treutler für ihre Ratschläge und Erfahrungen sowie für das Korrekturlesen der Diplomarbeit bedanken.

**DANKE!**

# Inhaltsverzeichnis


**1. Einleitung ..... 9**

**2. Neue Medien im (Mathematik-) Unterricht ..... 11**

2.1. Begriffsklärung: Neue Medien ..... 11

2.2. Didaktische Überlegungen zum Computereinsatz ..... 13

2.3. Neue Medien im Mathematikunterricht ..... 16

2.3.1. Computer-Algebra-Systeme (CAS) ..... 17

2.3.2. Tabellen-Kalkulations-Software (TKS) ..... 19

2.3.3. Dynamische-Geometrie-Software (DGS) ..... 19

2.4. Neue Medien – Neue Lernkultur? ..... 22

2.4.1. Offenes Lernen: Stationenbetrieb ..... 23

2.4.2. Eigenverantwortliches Arbeiten: Lernspirale nach Klippert ..... 24

2.4.3. Selbstorganisiertes Lernen ..... 28

**3. E-Learning und Lernpfade ..... 32**

3.1. Begriffsklärung: E-Learning ..... 32

3.2. Begriffsklärung: Lernpfade ..... 34

3.3. Lernpfade & E-Learning im Unterricht ..... 35

3.4. Gestaltung und Planung von Lernpfaden ..... 36

3.5. Vorteile des Einsatzes von Lernpfaden ..... 37

**4. Kompetenzen und Bildungsstandards im Unterricht ..... 39**

4.1. Kompetenzen ..... 39

4.2. Bildungsstandards im Mathematikunterricht ..... 42

**5. Vektorrechnung im Unterricht ..... 46**

5.1. Lehrplanbezug ..... 46

5.1.1. Allgemeiner Teil ..... 47

5.1.2. Fachbezogener Teil ..... 48

5.2. Einführung der Vektorrechnung ..... 50

5.2.1. Vorwissen ..... 50

5.2.2. Einführung des Vektorbegriffs ..... 51

5.2.2.1. Das geometrische Modell ..... 52

5.2.2.2. Das arithmetische Modell ..... 53

5.2.3. Vektorbegriff im Lernpfad ..... 54

5.3. Didaktische Betrachtung zur Einführung des Vektorbegriffs ..... 56

**6. Lernpfad Vektorrechnung ..... 58**

6.1. Die Medienvielfaltsprojekte ..... 58

6.1.1. Die Entstehung des Projekts ..... 58

6.1.1.1. ACDCA ..... 60

6.1.1.2. mathe online ..... 61

6.1.2. Zielsetzung des Projekts ..... 61

6.1.3. Projektdurchführung ..... 62

6.2. Medienvielfalt und Genderaspekte ..... 64

6.3. Das Konzept des Lernpfads zur Vektorrechnung ..... 66

6.4. Technisches zum Lernpfad ..... 67

6.4.1. Verwendetes Programm: GeoGebra ..... 67

6.4.2. Voraussetzungen der SchülerInnen ..... 68

6.5. Rückmeldungen aus der Evaluation des Lernpfads ..... 69

6.5.1. Ergebnisse der internen Evaluation ..... 69

6.5.2. Ergebnisse der äußeren Evaluation ..... 71

6.5.3. Rückmeldungen aus der LehrerInnenfortbildung ..... 72

6.6. Überarbeitung des Lernpfads zur Vektorrechnung ..... 72

6.6.1. Home- und Startseite ..... 72

6.6.2. Einleitung ..... 74

6.6.3. Pfeile ..... 77
6.6.4. Länge eines Pfeils ..... 80
6.6.5. Schiebung ..... 81
6.6.6. Vektoraddition ..... 83
6.6.7. Gegenvektor ..... 85
6.6.8. Vektorsubtraktion ..... 87
6.6.9. Rechenregeln ..... 90
6.6.10. Vielfaches von Vektoren ..... 92
6.6.11. Parallele Vektoren ..... 93
6.6.12. Anwendungsbeispiele zur Vektorrechnung ..... 95
6.6.13. Übung ..... 99

**7. Didaktische Begleitmaterialien ..... 101**

7.1. Didaktischer Kommentar ..... 101
7.2. Die Lernspirale ..... 104
7.3. Ein weiterer Unterrichtsvorschlag ..... 104
7.4. Die Projektmappe ..... 105

**8. Wissenstest ..... 109**

**9. Zusammenfassung und Ausblick ..... 111**

**10. Anhang ..... 113**

10.1. Fragebogen für LehrerInnen zum Lernpfad Vektorrechnung ..... 113
10.2. Didaktischer Kommentar ..... 115
10.3. Lernspirale ..... 120
10.4. Arbeitsplan (zur Lernspirale) ..... 129
10.5. Ein weiterer Unterrichtsvorschlag ..... 133
10.6. Die Projektmappe ..... 139
10.6.1. Deckblatt ..... 139
10.6.2. Bedienungsanleitung ..... 140

10.6.3. Arbeitsblatt ..... 141

10.6.4. Checkliste ..... 143

10.7. Wissenstest ..... 144

**11. Verzeichnisse ..... 146**

11.1. Abkürzungsverzeichnis ..... 146

11.2. Abbildungsverzeichnis ..... 149

11.3. Tabellenverzeichnis ..... 151

11.4. Literaturverzeichnis ..... 152

# 1. Einleitung

> *„Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir auch ohne Computer längst hätten nachdenken müssen.“ (Schupp zit. nach Leuders, 2010, S. 212)*

Der Einsatz neuer Medien im Unterricht, speziell im Mathematikunterricht, stellt für manche Lehrende eine große Herausforderung aber teilweise auch eine Überforderung dar. Oft wissen Lehrende nicht die Vorteile der neuen Medien zu nutzen und vermeiden weitestgehend die Verwendung der neuen Medien im Unterricht, wie beispielsweise des Computers. Dabei sollten LehrerInnen SchülerInnen dort abholen, wo sie gerade stehen, sei dies auf fachlicher oder auf technischer Ebene. Gerade in einer Zeit, in der SchülerInnen mit Computern und Internet aufwachsen und ihren Alltag prägen, sollte man als Lehrender im Umgang mit neuen Medien geübt sein und erkennen, wann der Einsatz der neuen Medien im Unterricht sinnvoll ist.

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich im ersten Kapitel mit dem Begriff „neue Medien“, wobei auf didaktische Überlegungen zum Computereinsatz im Mathematikunterricht eingegangen wird und wichtige technologische „Werkzeuge“ – Computer-Algebra-Software, Tabellenkalkulations-Software und Dynamische-Geometrie-Software – vorgestellt werden. Außerdem gibt dieses Kapitel Auskunft über Unterrichtmethoden wie offenes, eigenverantwortliches und selbstorganisiertes Lernen, die hinblickend auf den Einsatz der Lernpfade aus dem Projekt "Medienvielfalt im Mathematikunterricht" Verwendung finden.

Im zweiten Kapitel wird neben der Klärung der Begriffe „E-Learning“ und „Lernpfade“ auf die Gestaltung eines Unterrichts mit Lernpfaden sowie auf die Vorteile des Einsatzes von Lernpfade eingegangen.

Im anschließenden Kapitel werden sowohl die Begrifflichkeiten „Bildungsstandards“ und „Kompetenzen“ als auch die zentrale, kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik erörtert.

Kapitel 4 gibt einen Einblick in das mathematische Thema „Vektorrechnung“ und stellt zwei mögliche Zugänge zu dieser Thematik im Unterricht vor. Im Anschluss daran wird die Einführung der Vektorrechnung in Form eines Lernpfads vorgestellt und ein Bezug zum aktuellen Lehrplan hergestellt.

In Kapitel 5 liegt der Schwerpunkt dieser Diplomarbeit. Hier wird die Überarbeitung des bereits erwähnten Lernpfads „Vektorrechnung in der Ebene“ dokumentiert. Dieser Lernpfad ging aus dem Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ hervor und wurde im Zuge dieser Diplomarbeit grundlegend überarbeitet. Die hier beschriebenen

Veränderungen und Ergänzungen dieses Lernpfads und die damit verbundenen Unterrichts- und Begleitmaterialien basieren auf Evaluationen aus dem Medienvielfaltsprojekt sowie auf einer von mir durchgeführten LehrerInnenbefragung. Im abschließenden Kapitel wird ein im Zuge dieser Diplomarbeit erstellter Wissenstest zur Vektorrechnung vorgestellt. Dieser Wissenstest soll nach der erfolgreichen Bearbeitung des Lernpfads durch SchülerInnen zum Einsatz kommen und über ihre erworbenen Kompetenzen Auskunft geben.

Eine Zusammenfassung und ein kurzer Ausblick schließen die Auseinandersetzung mit dem Thema „Neue Medien im Mathematikunterricht am Beispiel Vektorrechnung in der Ebene“ ab.

# 2. Neue Medien im (Mathematik-) Unterricht

Die neuen Medien, wie beispielsweise der Computer, haben unsere Lebens- und Arbeitswelt erobert, aber auch stark verändert. Mit Hilfe eines Computers kann beispielsweise ein Arbeiter zahlreiche Produktionsprozesse steuern, sodass immer weniger, aber dafür besser ausgebildete Arbeitskräfte notwendig sind. Noch mehr Einfluss hat der Computer im Umgang mit Informationen. Die massenhafte Speicherung und Verarbeitung von Daten verändert den Umgang mit Wissen. Deshalb benötigt das durch den Computer beeinflusste Individuum eine Bildung, die einen verantwortlichen und emanzipatorischen Umgang mit den neuen Formen des Wissens ermöglicht (vgl. Barzel et al., 2005, S. 20f).

Der Einsatz neuer Medien im Unterricht ist unverzichtbar. Die österreichischen Lehrpläne empfehlen ein sachgerechtes und sinnvolles Nutzen von technologischen Mitteln im Unterricht. Sie sollen beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten eine Rolle spielen und ein integraler Bestandteil des Unterrichts sein (vgl. bmukk, 2004a, S. 3).

Mittlerweile gibt es auch viele Vorschläge für den Einsatz neuer Technologien im Mathematikunterricht sowie zahlreiche Erfahrungsberichte.

Doch was versteht man eigentlich unter den *neuen Technologien* bzw. *neuen Medien*? Diese Frage möchte ich im folgenden Abschnitt beantworten.

## *2.1. Begriffsklärung: Neue Medien*

Medien sind Träger- bzw. Vermittlungssysteme für verschiedenste Informationen (vgl. Hunneshagen zit. nach Brockhaus, 2005, S. 14). Bereits seit den 70er Jahren, wird der Begriff „neue Medien“ für Kommunikationsmittel, die durch die Technologieentwicklung entstanden sind, verwendet. Damit meinen wir Verfahren der Informationsverarbeitung und –verbreitung, welche wiederum auf den neuen Technologien beruhen und sich durch Multimedialität auszeichnen. Unter multimedial kann man die Zusammenwirkung von verschiedenen Medientypen verstehen, wie zum Beispiel Texte, Grafiken, Bilder und Töne.

Stefan Aufenanger definiert in seinem Artikel „Lernen mit neuen Medien – Was bringt es wirklich?“ den Begriff „neue Medien“ folgendermaßen:

> *„Unter ‚neuen Medien' werden [...] alle Formen der Wissensaufbereitung oder der Informationsvermittlung verstanden, die in digitalisierter Form über Computer oder Internet erreichbar sind und die sich durch eine hypermediale Struktur auszeichnen" (Aufenanger, 2003, S. 4).*

Dabei versteht er unter einer hypermedialen Struktur, dass es sich um einen nicht linearen Text handelt (Hypertext), welcher verschiedene Medien in einer einzelnen Präsentation integriert (Multimedia) und interaktiv verwendet werden kann (vgl. Aufenanger, 2003, S. 4).

Die Definition nach Aufenanger ist eine klare Darstellung des Begriffs „neuen Medien" im allgemeinen Gebrauch, doch was darf man unter „neue Medien", konkret auf den Mathematikunterricht bezogen, verstehen?

Weigand und Weth verstehen unter „neuen Technologien" in Bezug auf den Mathematikunterricht:

> *„elektronische Werkzeuge wie Taschenrechner, Graphische Taschenrechner, Computer und Internet, sowie alle für den Unterricht angebotenen Programme vor allem aber Tabellenkalkulationsprogramme, Computeralgebrasysteme und Dynamische Geometriesoftware" (Weigand & Weth, 2002, S. XI).*

Horst Hischer schließt sich der Definition von Weigand und Weth an. Darüber hinaus fragt sich Hischer jedoch, was die Bezeichnung „neu" auf sich hat. Nach Hischer hängt die Hinzunahme des Begriffs „neu" mit der Entwicklung der Technik zusammen:

> *„Die Geschichte der Entwicklung der Technik ist aus anthropologischer Sicht zugleich eine Geschichte der ‚Auslagerung' mechanischer Fähigkeiten des Menschen auf Geräte und Maschinen [...] Die Maschine Computer ist insofern revolutionär, als hier erstmals nicht wie bei früheren Maschinen mechanische Fähigkeiten des Menschen ausgelagert werden, sondern neuer Maschinentypus Fähigkeiten übernimmt, die bisher den menschlichen Geistesleistungen zuzurechnen waren" (Hischer, 2002, S. 5).*

Hischer bringt dazu ein sehr treffendes Beispiel: Die Beherrschung des Schachspiels galt stets als Kennzeichen besonderer Intelligenz, doch heute sind Schachautomaten großen Meistern oft ebenbürtig. Auch übers Internet kann man entweder gegen einen „menschlichen" oder „virtuellen" Gegner spielen. Manchmal weiß man gar nicht, ob man nun gegen einen wirklichen Menschen oder gegen ein von Menschen erdachtes Programm spielt. Die Denkfähigkeit der Menschen wurde also auf den Computer ausgelagert. Das begründet, nach Hischer (2003, S. 5f), die Stellung der auf der Mikroelektronik beruhenden Informationstechniken und somit ihre „Neuheit", was für ihn zu folgender Charakterisierung führt:

> *„**Neue Techniken** sind die datenprozessierenden Informationstechniken, sie sind sogenannte ‚Querschnittstechniken' – denn: der Computer erweist sich in nahezu allen Wissenschaften und Anwendungen als ein nützliches Werkzeug, ja gar als ein unverzichtbares Werkzeug!*
>
> ***Neue Medien** sind dann solche technischen Medien, die auf diesen Neuen Techniken beruhen".*

Das Besondere an der „Neuheit" dieser Techniken und Medien wird dadurch hervorgehoben, indem man das Attribut „neue" groß schreibt (vgl. Hischer, 2003, S. 5f).

In dieser Arbeit werde ich den Begriff „neue Medien" nur im Hinblick auf den Mathematikunterricht verwenden. Wenn also die Rede von neuen Medien ist, kann man darunter die technologischen Mittel wie Computer, Internet, Taschenrechner und alle für den Unterricht zur Verfügung stehenden Programme verstehen. Vor allem aber werde ich hauptsächlich auf den Computer als neues Medium im Unterricht eingehen.

## 2.2. Didaktische Überlegungen zum Computereinsatz

In der Literatur findet man unterschiedliche Einteilungen des Computereinsatzes in verschiedene Kategorien. Tietze et al. (2000, S. 121) unterscheiden den Einsatz des Mediums Computer in folgende vier Kategorien:

- *Medium*
- *Werkzeug*
- *Entdecker*
- *Tutor*

Der Computer als *Medium* dient zur Darstellung, Demonstration und Veranschaulichung mathematischer Phänomene wie beispielsweise Kurven, Funktionen, Raumkurven, Flächen und Verteilungen. Als *Werkzeug* dient dieser zur Einübung von Techniken und Fertigkeiten, zur Unterstützung des Verständnisses mathematischer Verfahren und Begriffe. Außerdem wird der Rechenaufwand bei Beispielen und Termumformungen erheblich verringert. Des Weiteren dient der Computer als *Entdecker*, worunter man die Hilfe beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge eines experimentellen Unterrichts versteht. Auch beim Entwickeln und Überprüfen von Hypothesen kann der Computer als Entdecker erfasst werden. Unter dem Computer als *Tutor* wird das Hilfsmittel für spezielle Lernprozesse verwendet (vgl. Tietze et al., 2000, S.121).

Reichel erwähnt diese Einteilung in seinem Buch ‚Computer im Mathematikunterricht' (1995, S. 21) ebenfalls, wobei er aber nur zwischen Medium, Werkzeug und Tutor unterscheidet. Weigand und Weth haben hingegen versucht, didaktische Prinzipien zu kategorisieren und im Rahmen von Leitlinien zu erklären, welche im Hinblick auf den Einsatz neuer Technologien eine besondere Bedeutung haben. Dabei unterscheiden sie *Inhaltsbezogene Leitlinien*, die auf den mathematischen Inhalt bezogen sind, *Schülerbezogene Leitlinien*, die Einstellungen und Verhalten von SchülerInnen beeinflussen und die *Werkzeugbezogene Leitlinie*, welche im Zusammenhang mit den verwendeten Werkzeugen zu sehen sind (vgl. Weigand & Weth, 2002, S. 27f).

Nach Weigand und Weth geht es außerdem beim Einsatz neuer Technologien im Mathematikunterricht darum, dass ein mathematisches Problem im Zentrum des Interesses stehen muss und erst dann überlegt werden kann, ob und welche Werkzeuge bei der Problemlösung sinnvoll sind und in welcher Weise sie eingesetzt werden können (vgl. Weigand & Weth, 2002, S. 25).

Das bedarf meiner Meinung nach einer gewissen medienpädagogischen Erfahrung von LehrerInnen. Es ist wichtig, dass man als Lehrende bzw. als Lehrender gerade in einer Zeit, in der Jugendliche mit dem Computer aufwachsen, dieses Medium ebenso gut beherrscht, wie es die SchülerInnen tun.

Medienpädagogik umfasst nach Issing,

> *„alle Bereiche, in denen Medien, für die Entwicklung des Menschen, für die Erziehung, für die Aus- und Weiterbildung sowie für die Erwachsenenbildung pädagogische Relevanz haben. Es erscheint deshalb sinnvoll, den Begriff ‚Medienpädagogik' als übergeordnete Bezeichnung für alle pädagogisch orientierten Beschäftigungen mit Medien in Theorie und Praxis zu verstehen und einzelne Aspekte der Medienpädagogik näher zu spezifizieren"* (Issing zit. nach Hischer, 2001, S. 80).

In diesem Sinne besteht nach Kron die Medienpädagogik aus den drei Bereichen *Mediendidaktik, Medienkunde und Medienerziehung* (vgl. Kron zit. nach Hischer, 2001, S. 80). Die *Mediendidaktik* befasst sich mit „*den Funktionen und Wirkungen von Medien in Lehr- und Lernprozessen"*. Die neuen Medien, insbesondere der Computer, bilden einen besonderen Untersuchungsgegenstand der Mediendidaktik. Bei der *Medienkunde* handelt es sich vielmehr um die „Vermittlung von Kenntnissen über Medien" womit ein weiterer Aspekt „neuer Medien" vorliegt. *Medienerziehung* hingegen verfolgt das Hauptziel, Heranwachsende zu einem „*bewussten, reflektierten, kritischen, bzw. sozial erwünschten Umgang mit Medien*" anzuleiten sowie auch zu begleiten (vgl. Issing zit. nach Hischer, 2001, S.80).

Infolge dessen spricht Hischer vom normativen Begriff der „integrativen Medienpädagogik“, wobei dem Begriff „*integrativ*“ eine zweifache Bedeutung zukommt: Alle drei Aspekte der Medienpädagogik sind bei Planung, Durchführung und Evaluation von Unterricht nicht unabhängig voneinander zu betrachten, überdies kann eine Medienpädagogik nicht nur von einem Unterrichtsfach übernommen werden. Es soll vielmehr von allen Unterrichtsfächern eine Verantwortung gefordert werden. So soll auch der Mathematikunterricht unter diesem Konzept der integrativen Medienpädagogik zu jedem dieser drei Bereiche beitragen (vgl. Hischer, 2001, S. 79). Die folgende Abbildung 1 von Hischer (2001, S. 81) stellt die drei Teilbereiche und deren Zusammenhänge nochmals übersichtlich dar.

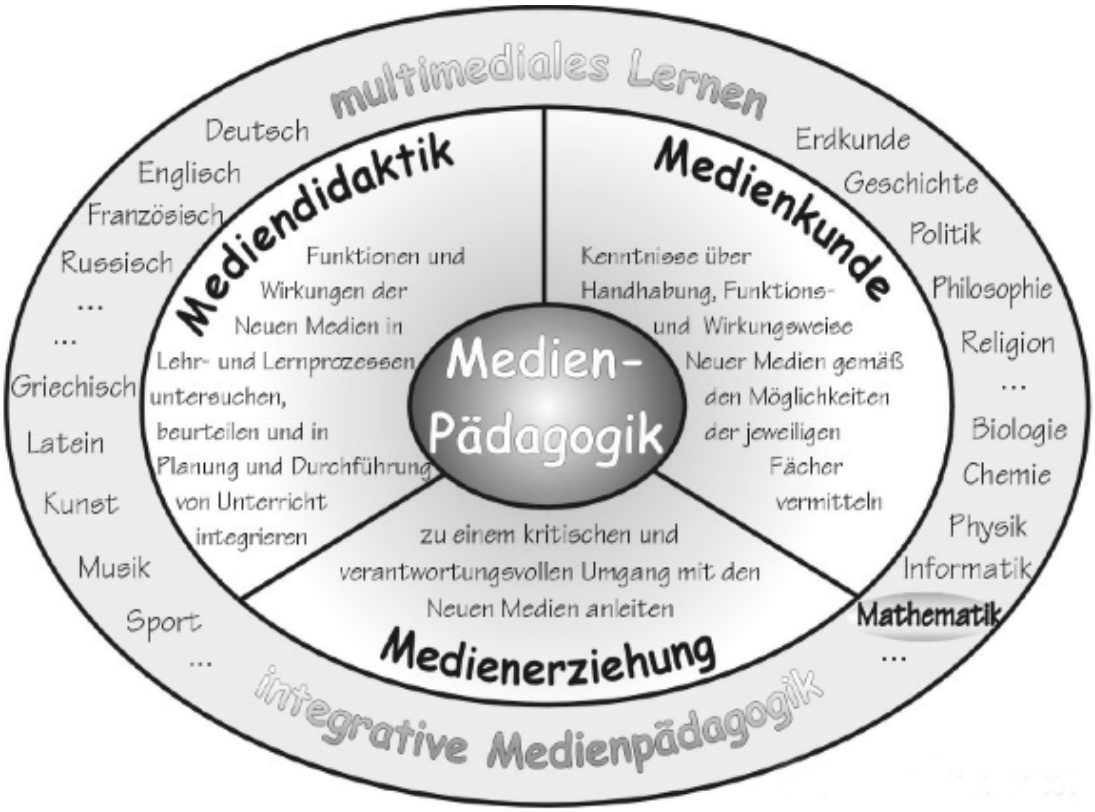



Abbildung 1: Medienpädagogik und deren Teilbereiche

Nach Hischer zählen diese drei Aspekte der Medienpädagogik zur sogenannten *Bereichsdidaktik*. Wie bereits erwähnt geht es bei den mediendidaktischen Aspekten der neuen Medien primär um ihren fachdidaktisch begründeten Einsatz im Unterricht sowie um den Umgang mit diesen neuen Medien, die sowohl unter medienkundlichen als auch unter medienerzieherischen Aspekten im Unterricht geprüft werden. Die neuen Medien werden demzufolge zum *Unterrichtsinhalt*. Sie dienen der Aufklärung und der Vermittlung von Haltungen und Einstellungen. Für Hischer bedeutet dies, dass die neuen Medien

hinsichtlich des pädagogischen Kontexts in doppelter Rolle gesehen werden müssen, nämlich als *Unterrichtsmittel* und als *Unterrichtsinhalt*:

- fachdidaktische Funktion neuer Medien:
    - als Unterrichtsmittel (Werkzeug oder Hilfsmittel)
    - als Unterrichtsinhalt (Gegensand des Unterrichts)
- bereichsdidaktische Sicht neuer Medien:
    - mediendidaktisch
    - medienkundlich
    - medienerzieherisch

Die Unterscheidung in *Werkzeug* und *Hilfsmittel* ist für Hischer folgende: Ein *Werkzeug* ist dadurch gekennzeichnet, dass es in einem Bereich vielseitig verwendbar und einsetzbar ist. Ein Hilfsmittel ist hingegen weniger vielseitig, sondern prinzipiell nur für einen bestimmten Zweck konstruiert worden. Ein Computeralgebrasystem ist für ihn sozusagen ein Werkzeug, hingegen ist ein Funktionsplotter, mit dem man nun Funktionsterme veranschaulichen kann, ein Hilfsmittel (vgl. Hischer, 2002, S. 6f).

Im folgenden Abschnitt möchte ich jene Werkzeuge erläutern, welche im computergestützten Mathematikunterricht verwendet werden. Hierzu möchte ich auch einige Hilfsmittel nennen.

## 2.3. Neue Medien im Mathematikunterricht

Die rapide Entwicklung der neuen Medien hat große Auswirkungen auf das Lernen im Unterricht. Der Einsatz des Computers im Mathematikunterricht beeinflusst sowohl die Methodik als auch den Inhalt des Mathematikunterrichts. Außerdem wird Wissen benötigt, um die verschiedenen Werkzeuge im Unterricht adäquat einsetzen zu können (vgl. Leuders, 2010, S. 212).

In den letzten Jahren haben sich folgende drei Typen von Werkzeugen im Mathematikunterricht etabliert:

- Computer-Algebra-Systeme (CAS)
- Tabellenkalkulations-Software (TKS)
- Dynamische Geometriesoftware (DGS)

### 2.3.1. Computer-Algebra-Systeme (CAS)

***CAS*** erweitert den numerischen Taschenrechner auf das Rechnen mit Variablen, da hier symbolische Operationen und Rechnungen möglich werden. Zu Beginn der 90er Jahre wurden CAS als Bedrohung für den Mathematikunterricht angesehen, da sie weite Teile der operativen Inhalte der Oberstufe quasi auf Knopfdruck abdecken. Vieles konnte nun einfach und schnell mit CAS durchgeführt werden. Natürlich führte das zu einer Debatte um den Bildungswert eines derartigen Unterrichts. Man darf aber nicht vergessen, dass CAS durchaus unterstützend, beispielsweise bei der Einführung der Differentialrechnung, sein kann. Es erwies sich etwa, dass SchülerInnen bei der Einführung der Differentialrechnung Probleme mit dem Bruchrechnen haben. Mit dem Einsatz von CAS kann man diesen Problemen begegnen, was nicht heißt, dass die Defizite des Bruchrechnens einfach zu akzeptieren wären, wohl aber solche Schwächen beim Erlernen eines neuen Themas umgangen werden können (vgl. Leuders, 2010, S. 213f).

Die Entwicklung von CAS zwang, über die grundlegende Konzeption des Mathematikunterrichts nachzudenken. Das Whitebox/Blackbox- Prinzip brachte erste Klärungen in didaktischer Hinsicht. Während die Whitebox-Phase jene „*des verstehenden Lernens*“ ist, versteht man unter der Blackbox-Phase „*das erkennende und begründete Anwenden*“. In der Whitebox-Phase sollen SchülerInnen beispielsweise einen Begriff oder einen Algorithmus verstehen und „zu Fuß“ anwenden können. Die Blackbox-Phase schließt sich der Whitebox-Phase an, erst hier verwenden SchülerInnen die mächtigen CAS-Befehle (vgl. Heugl zit. nach Leuders, 2010, S. 214).

Das bis dato am häufigsten in österreichischen Schulen verwendete CAS ist Derive, aber auch Maxima, Maple, Mathematica, MuPAD, Mathcad und Livemath kommen zum Einsatz, wobei die meisten nicht für die Schule entwickelt wurden (vgl. Leuders, 2010, S. 213ff).

Beispielsweise lässt sich mit Derive ein Gleichungssystem mit dem Befehl „SOLVE“, wie man in Abbildung 2 sehen kann, lösen:

#3: SOLVE(3·x − y = 5, y)

#4: $y = 3\cdot x - 5$

#5: SOLVE(2·x + 3·y = 7, y)

#6: $y = \frac{7 - 2\cdot x}{3}$

#7: $3\cdot x - 5 = \frac{7 - 2\cdot x}{3}$

#8: $\text{SOLVE}\left(3\cdot x - 5 = \frac{7 - 2\cdot x}{3}, x\right)$

#9: $x = 2$

#10: SOLVE(SUBST(3·x − y = 5, x, 2), y)

#11: $y = 1$

Abbildung 2: Gleichung lösen mit Derive

Mit den meisten CAS Programmen kann man beliebige Funktionen zeichnen lassen („plotten“), wie das folgende Beispiel in Maxima in Abbildung 3 darstellt:

Die Eingabe zu dieser Grafik in Maxima ist

```
plot3d(x*exp(-x^2-y^2),[x,-2,2],[y,-3,3],[grid,100,100]);
```

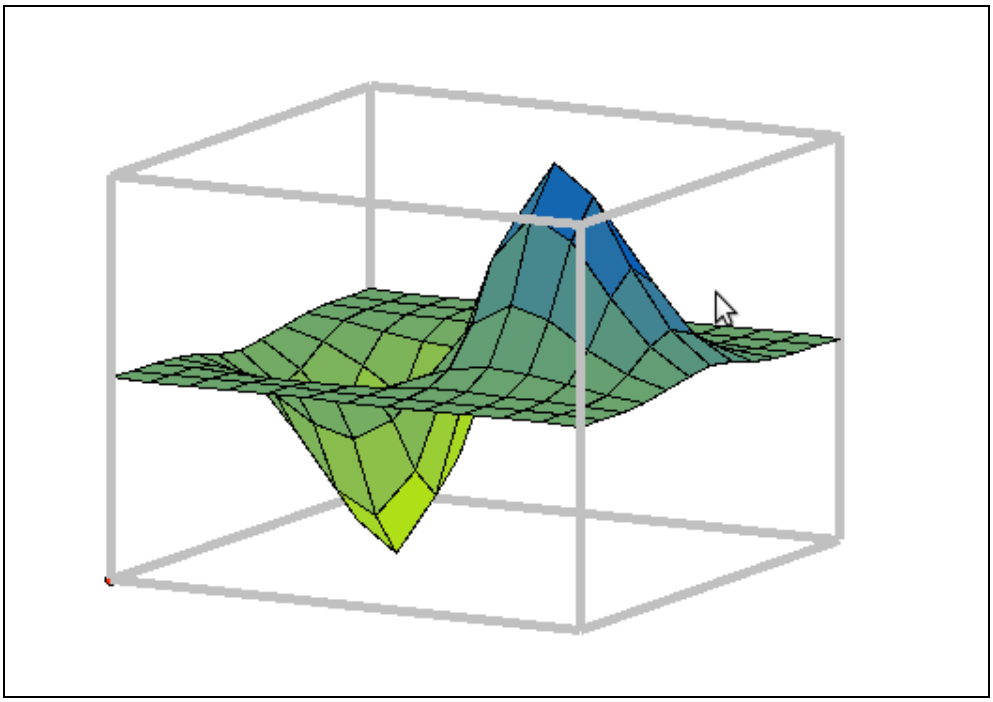


Abbildung 3: 3-D Grafik in Maxima (vgl. www.matheplanet.com, 2006)

### 2.3.2. Tabellen-Kalkulations-Software (TKS)

Die am häufigsten verwendete **TKS** im Unterricht ist Excel als Teil von MS Office. TKS wurde zu Beginn teilweise nur für das sogenannte Sachrechnen verwendet und als Ersatz für den Taschenrechner gesehen. Mit TKS können aber auch umfangreiche Berechnungen in Tabellen mit geeigneten Formeln durchgeführt werden. TKS bewies sich überdies als ein didaktisch besonders wertvolles dynamisches Rechen- und Visualisierungswerkzeug, da die Darstellungsweisen symbolisch (Formeln), numerisch (Zellenwert) und grafisch (Diagramm) realisiert und miteinander verbunden werden. Man kann vorbereitete elektronische Arbeitsblätter einsetzen oder man lässt die SchülerInnen mit entsprechenden Kenntnissen in der Programmierung von TKS solche Arbeitsblätter selbst erstellen, was je nach mathematischem Inhalt entschieden werden kann. Wobei man aber bei letzteren die Gelegenheit nutzen sollte, verschiedene Aspekte von Variablen und funktionalen Zusammenhängen in TKS mit den SchülerInnen zu klären. TKS eignet sich sehr gut für den Einsatz in der beschreibenden Statistik. In einem sehr einfachen Beispiel (siehe Abbildung 4) können SchülerInnen fünf Monatseinkommen untersuchen, welche Eigenschaften zum Beispiel der arithmetische Mittelwert und Median haben, und wie diese mit Streuungsmaßen zusammenhängen.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | **Einkommen** | **Mittelwert** | **Median** |
| 3 | x1 | 3000 | 3320 | 2000 |
| 4 | x2 | 9000 | | |
| 5 | x3 | 1000 | | |
| 6 | x4 | 2000 | | |
| 7 | x5 | 1600 | | |
| 8 | | | | |

Abbildung 4: Beispiel TKS

SchülerInnen können bei diesem Beispiel in Abbildung 4 durch sinnvolles Verändern der Einkommenswerte herausfinden, dass der Median gegen Ausreißer unempfindlich ist. Mit verschiedenen Diagrammtypen kann der Sachinhalt hier sehr klar dargestellt werden (vgl. Leuders, 2010, S. 219ff).

### 2.3.3. Dynamische-Geometrie-Software (DGS)

Das dritte und letzte Werkzeug für den Einsatz des Computers im Mathematikunterricht, ist die DGS. Sehr bekannte und häufig im Unterricht eingesetzte DGS sind GEONExT, Geolog, Cinderella und seit einigen Jahren auch GeoGebra (siehe Abschnitt 6.4.1). Mit

diesen Hilfsmitteln ist es möglich, Punkte mit der Maus zu verschieben, sodass sich alle davon unabhängigen Objekte bezüglich ihrer geometrischen Relationen ändern, und je nach Einstellung auch eine Spur hinterlassen werden kann. Die Techniken der DGS liefern im Hinblick auf die Unterscheidung in Eingabe- und Ausgabeobjekte einen geometrischen Beitrag zum funktionalen und algorithmischen Denken. DGS erfordern außerdem eine gewisse SchülerInnenaktivität und sind virtuell handlungsorientiert. Mit dem Einsatz von DGS ist nicht mehr die einzelne starre Konstruktion das Ziel, sondern „*die Untersuchung von Invarianzen und funktionalen Abhängigkeiten*“. Dies zieht eine Veränderung der Sehgewohnheiten der SchülerInnen nach sich. SchülerInnen müssen nun darauf achten, was sich in der Dynamik nicht ändert, oder eben schon (vgl. Leuders, 2010, S. 223ff). Auch im Hinblick auf das Beweisen ermöglicht die Software ein visuell-dynamisches Beweisen (vgl. Elschenbroich zit. nach Leuders, 2010, S. 225).

Natürlich soll die DGS nicht von der traditionellen Geometrie (Zirkel und Lineal, Kleben und Schneiden etc.) ablenken, sondern dort eingesetzt werden, wo die Dynamik einen zusätzlichen Nutzen hat. Elektronische Arbeitsblätter schaffen eine Grundlage für mathematisches Erkunden der SchülerInnen und vermeiden zugleich einen großen Programmieraufwand im Unterricht (vgl. Leuders, 2010, S. 225f). Ein sehr schönes Beispiel ist die Darstellung des Thaleskreises mit dem Hilfsmittel GeoGebra (siehe Abschnitt 6.4.1).

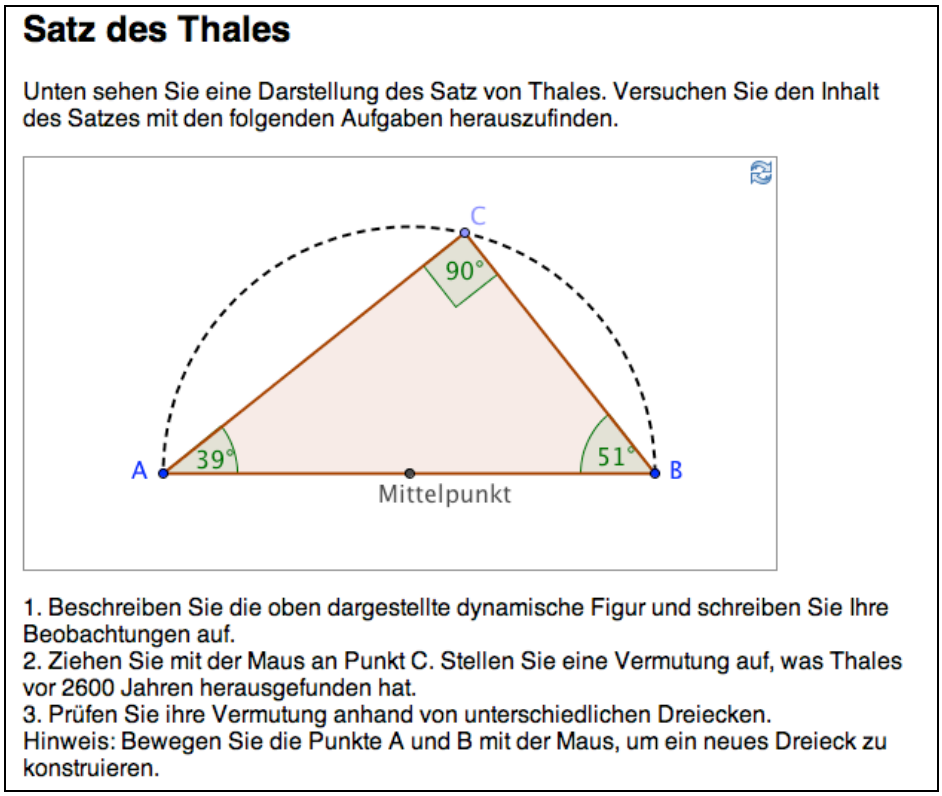



Abbildung 5: Satz des Thales mit GeoGebra

Die Abbildung stellt ein elektronisches dynamisches Arbeitsblatt dar (vgl. Hohenwarter & Hohenwarter, 2011, S. 21). Durch die Anweisungen sollen sich SchülerInnen Schritt für Schritt den Satz des Thales erarbeiten.

Selbstverständlich ist die Verfügbarkeit von Computern oder Computerräumen, um diese Werkzeuge im Unterricht verwenden zu können, ein zentrales Thema. Viele Schulen sind zwar schon recht gut mit Computer und Laptops ausgerüstet, andere aber auch nicht, was ich aus der eigenen Praxis erfahren konnte. Neben Computern gibt es auch Taschenrechner (Ti-Nspire oder Casio Classpad), die diese drei zentralen Werkzeuge vereinigen. Wichtig ist auch die Möglichkeit zur Nutzung der Werkzeuge zu Hause in Form von Hausübungen, Nacharbeiten und Vorbereiten von Unterricht, was für den Lernerfolg bestimmend ist. SchülerInnen werden durch die zusätzliche Verwendung zu Hause vertrauter im Umgang mit den Werkzeugen (vgl. Leuders, 2010, S. 245).

## 2.4. Neue Medien – Neue Lernkultur?

In diesem Abschnitt soll der Begriff „neue Lernkultur“ erläutert und auf neue Formen des Lehrens und Lernens eingegangen werden. Zu Beginn werde ich mich hauptsächlich auf die Überlegungen von Weinert in seinem Artikel „Lernkultur im Wandel“ (Weinert zit. nach Breitfeld, 2009, S. 5ff) beziehen, da Weinert sehr häufig bei der Definition des Begriffs „Lernkultur“ in der Literatur erwähnt wird.

Nach Weinert muss man die Begriffe „*Lernen*“ und „*Kultur*“ zunächst getrennt betrachten, um eine Antwort auf die Frage, welche Entwicklung die Lernkultur macht, zu bekommen. Er versteht unter dem Begriff „Kultur“ und „kultureller Wandel“ hinsichtlich des schulischen Lernens Folgendes:

> *„ [...] man könnte unter Lernkultur die Gesamtheit der für die bestimmte Zeit typischen Lernformen und Lehrstile sowie die ihnen zugrunde liegenden anthropologischen, psychologischen, gesellschaftlichen und pädagogischen Orientierungen verstehen“ (Weinert zit. nach Breitfeld, 2009, S. 5).*

Lernkultur steht also in Abhängigkeit der Zeit und wird durch Veränderungen der Gesellschaft beeinflusst. Nach Weinert ist die neue Lernkultur eine Veränderung eines komplexen Systems, in dem sowohl SchülerInnen als auch LehrerInnen, Lerninhalte und Lernziele ausschlaggebend sind (vgl. Weinert zit. nach Breitfeld, 2009, S. 9). SchülerInnen wachsen heute unter anderen Bedingungen und Verhältnissen auf, was auch im Unterricht zu spüren ist. Heterogenität in den Klassen nimmt immer mehr zu, teils durch den Zuwachs der internationalen Mitbürger, teils auch durch unterschiedliche Lebensgewohnheiten und Ansprüche (vgl. Haarmann & Kalb, 1999, S. 50). Doch nicht nur die Veränderungen der Gesellschaft, auch die Entwicklung der neuen Technologien und die damit verbundene enorme Wissensvermehrung, hat Auswirkungen auf die Veränderung der Lernkultur (vgl. Müller & Iberer, 2002).

Im Zuge dieser Diplomarbeit werde ich hauptsächlich auf Aspekte der neuen Lernkultur in Bezug auf den Einsatz neuer Medien eingehen. Deshalb möchte ich nun drei Organisationsformen von Unterricht erläutern, welche sich im Rahmen von neuer Lernkultur im schulischen Lernen etabliert haben, und für den Einsatz der Lernpfade im Unterricht aus dem Medienvielfaltsprojekt (Stepancik, 2006, S. 20), auf welches in Abschnitt 6.1 näher eingegangen wird, verwendet wurden:

- *Stationenbetrieb aus dem Bereich „offenes Lernen“*
- *Lernspiralen mit Methoden des eigenverantwortlichen Arbeitens (EVA) nach Klippert*
- *selbstorganisiertes Lernen (SOL) nach Herold*

### 2.4.1. Offenes Lernen: Stationenbetrieb

Als erstes werde ich den Stationenbetrieb aus dem Bereich des offenen Lernens erklären und im Vorfeld „offenes Lernen“ definieren:

> *„Offener Unterricht gestattet es dem Schüler, sich unter der Freigabe von Raum, Zeit und Sozialform Wissen und Können innerhalb eines ‚offenen Lehrplanes' an selbst gewählten Inhalten auf methodisch individuellem Weg anzueignen. Offener Unterricht zielt im sozialen Bereich auf eine möglichst hohe Mitbestimmung bzw. Mitverantwortung des Schülers bezüglich Infrastruktur der Klasse, der Regelfindung innerhalb der Klassengemeinschaft sowie der gemeinsamen Gestaltung der Schulzeit ab“* (Peschel, 2002, S. 78).

Nach Peschel ist der Begriff „offenes Lernen“ sehr vielseitig. Er beschreibt infolgedessen unterschiedliche Formen von Offenheit (vgl. Peschel, 2002, S. 67). Für Peschel gibt es demnach eine *organisatorische, methodische, inhaltliche und soziale Öffnung.* Unter der organisatorischen Öffnung versteht er die Öffnung nach Raum, Zeit und Sozialform. Beim Lernen der SchülerInnen spielt der gestaltete Raum oft eine wesentliche Rolle, sowie auch der Rhythmus beim Arbeiten und beim Lernen. Die Wahl der Sozialform (Gruppen-, Partner- oder Einzelarbeit) ist oft ebenso ausschlaggebend (vgl. Peschel, 2002, S. 39ff).

SchülerInnen sollen nach der methodischen Öffnung den Lernweg selbst wählen können, um zu einer Lösung zu gelangen. Unter der inhaltlichen Öffnung versteht man, dass SchülerInnen den Lernstoff selbst wählen können, da dadurch das Interesse und zugleich auch die Motivation der SchülerInnen erhöht werden. Die soziale Öffnung sieht eine Gemeinschaft vor, die demokratisch geführt wird und in der jeder Teilnehmer der Klasse ein gleichberechtigtes Mitglied ist (vgl. Peschel, 2002, S. 88f).

Zu den offenen Unterrichtsformen zählen vor allem Freie Arbeit, Wochenplanarbeit, projektorientiertes Lernen, Werkstattunterricht und Stationenbetrieb (vgl. Peschel, 2002, S. 8ff). Letztere Unterrichtsform werde ich im Folgenden erklären.

Lernen an Stationen (Stationenlernen, Stationenzirkel und Lernzirkel) berücksichtigt unterschiedliche Lernvoraussetzungen, unterschiedliche Zugänge und Betrachtungsweisen sowie unterschiedliche Lern- und Arbeitsgeschwindigkeiten. Ein Lernen mit allen Sinnen ist durch ein sehr vielfältiges Angebot an Aufgaben möglich. SchülerInnen können selbstständig und eigenverantwortlich Aufgaben auswählen, diese bearbeiten und kontrollieren. Das Ziel beim Stationenbetrieb ist, dass möglichst viele Repräsentationsebenen verwendet werden, sodass der Unterricht verschiedenen Lerntypen gerecht wird. Stationenbetriebe eignen sich sowohl für das Üben eines bereits erlernten Stoffes, als auch für das Erlernen eines neuen Themengebiets. Es ist sinnvoll,

dass verschiedene Sozialformen beim Lernen in Stationen eingesetzt werden und das Angebot an Wahl- und Pflichtaufgaben für SchülerInnen klar ersichtlich ist.

Eine Leistungsüberprüfung kann in Form einer schriftlichen Übung oder einer Klausur erfolgen, oder als „sonstige Mitarbeit“ in die Note einfließen. Die Funktion der LehrerInnen ist im wesentlichen jene des Beraters, da die Lösungen meist an den Stationen aufliegen oder beim Einsatz des Computers einfach angeklickt werden können (vgl. Leuders, 2010, S. 189ff).

Die Anforderungen an Stationenlernen im Mathematikunterricht kann man folgendermaßen zusammenfassen (vgl. Leuders, 2010, S. 191):

- Die Vielfalt der Aufgaben soll ganzheitliches Lernen mit allen Sinnen ermöglichen.
- Der Unterrichtsgegenstand soll möglichst auf allen Repräsentationsebenen (symbolisch, ikonisch, enaktiv) dargestellt werden.

Außerdem soll das Angebot der Lernstationen:

- verschiedene Lerneingangskanäle berücksichtigen, sodass möglichst viele verschiedene Lerntypen angesprochen werden.
- binnendifferenzierend gestaltet sein. Es fördert so lernschwächere und fordert leistungsstärkere SchülerInnen.
- eine eigenverantwortliche Auswahl und Selbstkontrolle der SchülerInnen ermöglichen.

### 2.4.2. Eigenverantwortliches Arbeiten: Lernspirale nach Klippert

Ein zentraler Punkt der neuen Lernkultur ist das eigenverantwortliche Arbeiten (EVA) und Lernen der SchülerInnen. Nach Klippert (2004, S. 39ff) ist das Ziel von EVA Schlüsselqualifikationen wie Fachkompetenz, Methodenkompetenz, Sozialkompetenz und Persönliche Kompetenz zu erreichen. Die LehrerInnen, die normalerweise im einem traditionellen Unterricht exzerpieren, strukturieren, interpretieren, analysieren und in sonstiger Weise das Lernen managen, treten bei der Methode des EVA in den Hintergrund und fungieren meist als BeraterIn, PartnerIn oder ModeratorIn von Lernsituationen.

Damit das EVA Erfolge zeigt, müssen SchülerInnen gängige Lern- und Arbeitstechniken beherrschen. Außerdem müssen sie argumentations- und kommunikationsfähig sein und konstruktiv sowie regelgebunden im Team arbeiten können. Für Klippert sind dies die sogenannten Basiskompetenzen bzw. Sockelqualifikationen. Die Sockelqualifikationen sollen ein solides Fundament darstellen, um die Schlüsselqualifikationen wirksam zu

erreichen. Diese Qualifikationen stellt er übersichtlich in einem „neuen Haus des Lernens“ (siehe Abbildung 6) dar:

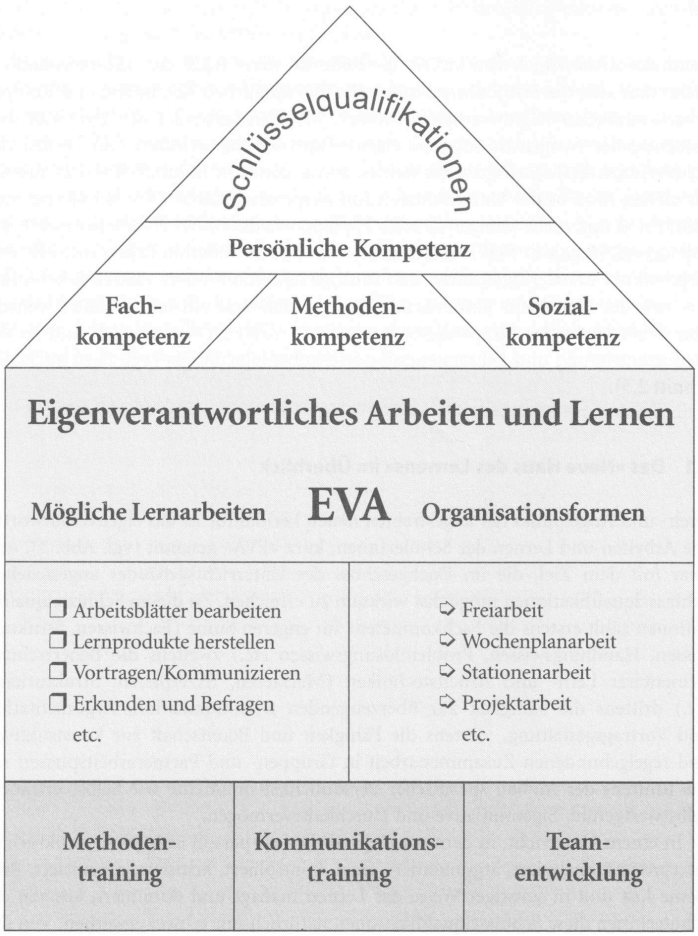



Abbildung 6: Das neue Haus des Lernens

Der Unterricht sollte so aufgebaut sein, das SchülerInnen die Möglichkeit haben Lern- und Arbeitstechniken einzuüben, grundlegende Argumentations- und Kommunikationstechniken zu trainieren sowie die Teamfähigkeit und den Gruppenunterricht durch zahlreiche Übungen zu kultivieren.

Das aktiv-produktive Lernen der SchülerInnen steht nun im Mittelpunkt des EVA-Unterrichts. Durch vielfältige Lernhandlungen – die lehrplan-, themen- und materialbezogen ausgerichtet sind – werden die unterschiedlichen Begabungen der SchülerInnen angesprochen. Der EVA-Unterricht kann als ein handlungorientierter Unterricht verstanden werden, der nicht nur den Erwerb der Schlüsselqualifikationen begünstigt, sondern zugleich auch für eine nachhaltigere Verankerung des Gelerntes im Gedächtnis der SchülerInnen sorgt.

Abbildung 6 stellt mögliche Organisationsformen wie Wochenplanarbeit, Stationenarbeit, Projektarbeit etc dar. Der Unterricht nach der Methode des EVA ist schlichter zu

organisieren und muss kleinschrittig im Fachunterricht aufgebaut werden um Überforderungen auf Seite der SchülerInnen, aber auch der LehrerInnen, zu vermeiden. Das bedeutet, dass das EVA beim eigenverantwortlichen Beschaffen und Auswerten lernrelevanter Informationen beginnt und über das Planen sowie Organisieren von Arbeitsprozessen bis zum Analysieren, Kommentieren und Problematisieren fachlicher Inhalte reicht. Mit anderen Worten ausgedrückt setzt EVA bei einfachen Lerntätigkeiten ein und wird mit steigender Routine der SchülerInnen anspruchsvoller und komplexer (vgl. Klippert, 2004, S. 44ff).

Ein grundlegendes Gestaltungsprinzip des eigenverantwortlichen Arbeitens und Lernen stellt das Konzept der *Lernspirale* dar. Im Zuge der Überarbeitung des Lernpfades und der Begleitmaterialien, welche im Abschnitt 6.5.3 und Kapitel 7 beschrieben werden, wurde eine Lernspirale nach Klippert als ein Unterrichtsvorschlag für den Einsatz des Lernpfads im Unterricht erstellt (siehe Anhang 10.3).

Der Vollständigkeit halber werde ich anschließend das Konzept der Lernspirale nach Klippert erläutern.

Das EVA (Klippert, 2004, S. 63ff) zeichnet sich durch einen klaren Lehrplan- und Themenbezug aus sowie dadurch, dass SchülerInnen auf unterschiedliche Methoden aufgefordert werden, sich in das jeweilige Lehrplanthema mithilfe verschiedener Lernaktivitäten „hineinzubohren“. Die SchülerInnen sollen dabei möglichst nachhaltige inhaltliche und methodische Kompetenzen aufbauen. SchülerInnen betreiben sozusagen einen Arbeitsunterricht anhand unterschiedlicher Methoden. Nach Klippert ergibt sich die Möglichkeit, dass sich SchülerInnen im Sinne des „Spiralbohrens“ tief in ein Thema hineinbohren. Demzufolge erklärt sich auch der Begriff Lernspirale.

Bei einer Lernspirale wird grundsätzlich zwischen *Makro- und Mikrospirale* unterschieden. Um eine Makrospirale handelt es sich dann, wenn ein komplexeres Unterrichtsthema in mehrere *Arbeitsinseln* (A 01 bis A...) zerlegt wird. Diese Arbeitsinseln werden durch verschiedene EVA-Aktivitäten der SchülerInnen bearbeitet. Untergliedert man diese Arbeitsinseln in einfachere *Arbeitsschritte*, so spricht man von einer Mikrospirale. Sie zeichnet sich dadurch aus, dass SchülerInnen bestimmte Teilaufgaben mehrphasig bearbeiten und dabei inhaltliche, methodische, kommunikative und teamspezifische Kompetenzen erworben werden.

Beispielhaft werde ich die Arbeitsinseln der Lernspirale zum Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene (siehe Anhang 10.3) anführen:

| | |
|---|---|
| Vorwissen/ Voreinstellungen aktivieren | |
| A 00 | Einführung |
| Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten | |
| A 01 | Pfeile |
| A 02 | Länge eines Pfeiles |
| A 03 | Schiebung |
| A 04 | Rechenarten |
| A 05 | Vielfaches von Vektoren |
| A 06 | Parallele Vektoren |
| Komplexere Anwendungs-/ Transferaufgaben | |
| A 07 | Anwendungen der Vektorrechnung |

Tabelle 1: Arbeitsinseln Lernspirale zur Vektorrechnung

Abbildung 7: Spiralbohrer (Klippert, 2004, S. 68)

Die Arbeitsinseln A 00 bis A 07 sind hinsichtlich des Anforderungsgrades unterschiedlich.

Während der jeweiligen Lernkorridore müssen SchülerInnen z.B. Arbeitsblätter bearbeiten, Mathematik-Aufgaben lösen, eine komplexe Visualisierung eines Referats herstellen oder auch ein Projekt planen und realisieren.

Bei einer Lernspirale wird großer Wert auf Methodenvielfalt gelegt. Demzufolge werden die SchülerInnen unterschiedlich angesprochen und zu einem aktiven und produktiven Lernen angeregt. Die Rolle der Lehrenden ist eine unterstützende, sie organsieren, moderieren und bereiteten die Arbeitsinseln vor.

Das spiralförmige Arbeiten der SchülerInnen ist sehr abwechslungsreich, das von der Einzel- über die Partner- und/oder Gruppenarbeit bis zur Präsentation und/oder Diskussion im Plenum reicht.

Die „*Sensibilisierungsphase*“ ist der Beginn des Arbeitens mit einer Lernspirale. Hier wird Vorwissen und Voreinstellung aktiviert. An dieser Phase schließt sich eine umfangreiche „*Informationsphase*“ mit weiteren Arbeitsinseln an, die der Erarbeitung von Kenntnissen und Verfahrensweisen zum Thema dienen. Abgeschlossen wird die Makrospirale von

einer „*Transferphase*“, dessen Arbeitsinseln zur Anwendung und Vertiefung des bisher Gelernten unterstützen sollen (Klippert, 2004, S. 63ff).

### 2.4.3. Selbstorganisiertes Lernen

Zu Beginn sollen die Begriffe „*selbstgesteuertes Lernen*“, „*selbstbestimmtes Lernen*“ und „*selbstorganisiertes Lernen*“ definiert werden, da diese Begriffe in der pädagogischen Praxis oft vermischt oder synonym verwendet werden.

Unter *selbstbestimmtem Lernen* versteht man, dass ein Mensch freie Entscheidungsfähigkeit darüber hat, wo er lernt, was er lernt, mit wem er lernen möchte und mit welcher Methode er sich den Lerninhalt aneignet. Da in den meisten Bildungseinrichtungen gesellschaftliche und inhaltliche Ziele verfolgt werden, ist dort selbstbestimmtes Lernen kaum erreichbar. Beim *selbstorganisierten Lernen* hingegen ist das individuelle Strukturieren von Lerninhalten essentiell, um Lerninhalte überhaupt aufnehmen zu können. Eine große Bedeutung beim selbstorganisierten Lernen spielen Lernumgebungen. *Selbstgesteuertes Lernen* ist ähnlich zum selbstorganisierten Lernen, wobei aber Lernende über Aufgaben und Methoden entscheiden können (vgl. Herold & Herold, 2010b).

Martin Herold entwickelte ein didaktisches Konzept für die Umsetzung des Selbstorganisierten Lernens (SOL):

> *„Das Lernen wird als natürlicher Anpassungsprozess von lebenden Systemen an ihre Umwelt verstanden“ (Herold & Herold, 2010b).*

Dieser Anpassungsprozess ereignet sich nach Zielorientierung (effizient überleben, das bedeutet mit so wenig Aufwand wie möglich), Selbstähnlichkeit/Einfachheit des Grundmusters (energiesparend durch wiederkehrende Strukturen) und Selbstoptimierung/Dynamik (es ist nachher besser als vorher). Dies sind die sogenannten Selbstorganisationsprinzipien. Nach Herold & Herold (2010a) kann Wissen niemals vermittelt werden: „*Das Gehirn des Lernenden ist stets die letzte Instanz, die entscheidet, ob und was gelernt wird*“. Aufgrund der eben aufgezählten Prinzipien kann man sagen, dass Selbstorganisiertes Lernen das Lernen nach den natürlichen Selbstorganisationsprinzipien des Lebens meint.

Eine Lehrperson, die nach dem Konzept des SOL arbeitet, berücksichtigt folgende Prinzipien. SOL-Lernsettings (vgl. Herold & Herold, 2010a):

- schaffen Raum für körperliche und psychische Grundbedürfnisse
- setzen auf Kooperation zwischen SchülerInnen

- benötigen individuelle Verarbeitung des Gelernten
- erfolgen im Wechsel aus Er- und Verarbeitungsphasen sowie kollektiven und individuellen Phasen
- machen Lernerfolge durch transparente Leistungsbewertung sichtbar
- geben Orientierung im Lernprozess
- fördern Reflexion über das eigene und gemeinsame Lernen
- erhöhen die Wirksamkeit der SchülerInnen durch Verantwortung für sich selbst und andere

In einer Infobroschüre über SOL des Ministeriums für Kultus, Jugend und Sport aus Baden-Württemberg halten Herold und Landherr (2003, S. 4) fest, dass das organisatorische Grundprinzip das *Gruppenpuzzle* darstellt. Das Gruppenpuzzle ist ein

> *„arbeitsteiliges Verfahren, aus dem sich die Notwendigkeit verantwortlicher Erarbeitung und Vermittlung von Fachinhalten ergibt, da die jeweils anderen Gruppen auf die Ergebnisse der eigenen Gruppe angewiesen sind“ (Herold & Landherr, 2003, S. 4).*

Das heißt, es geht um den Wechsel der Wissenserarbeitung in themengleichen Expertengruppen und der Wissensvermittlung in Stammgruppen (vgl. Herold & Landherr, 2003, S. 8). Das zu behandelnde Thema wird in einzelne, voneinander unabhängige Teilgebiete aufgeteilt. Anders ausgedrückt wird eine Stammgruppe in einzelne „Puzzleteile“ zerschnitten. Diese Puzzleteile werden anschließend zu einem neuen „Bild“, der Expertengruppe und letztendlich wieder zu einer Stammgruppe zusammengefügt. Die Stammgruppen erhalten die gleichen Aufgabenstellungen (arbeitsgleiche Gruppen) und die Expertengruppen erarbeiten gemeinsam die Lösung der gestellten Aufgaben.

Abbildung 8 soll diese Vorgehensweise nochmal klar darlegen (Stangl, 2005):

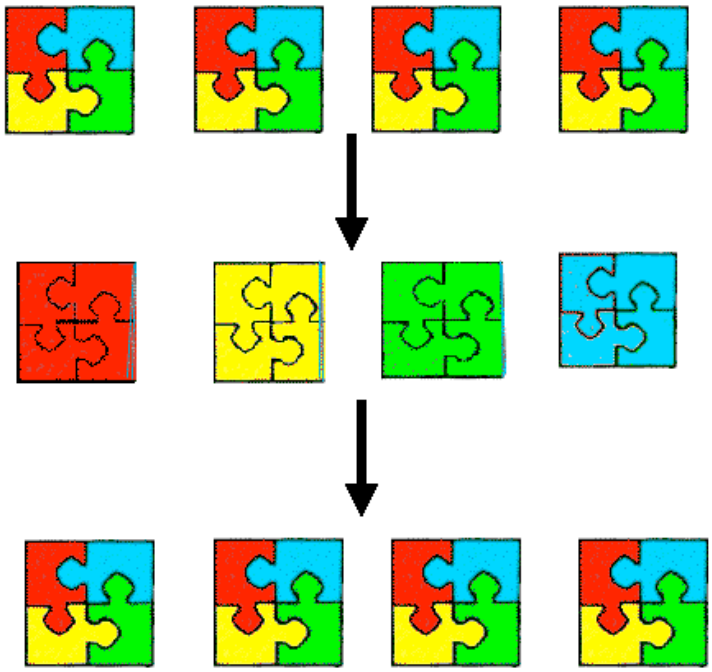
| | |
|---|---|
| 1. Phase: *Stammgruppen*<br>• Erstinformation<br>• Problemstellung |  |
| 2. Phase: *Expertengruppe*<br>• spezifische Themen | |
| 3. Phase: *Stammgruppen*<br>• gegenseitige Information über Arbeitsergebnisse | |

Abbildung 8: Gruppenpuzzle (Stangl, 2005)

SchülerInnen entscheiden sich in der Stammgruppe für je ein Teilthema, welches anschließend in der Expertengruppe anhand eines Arbeitsauftrages erarbeitet wird. Jeder Themenbereich wird von den Unterrichtsgruppen in der 3. Phase von einem Experten an die Gruppenmitglieder vermittelt. Die Puzzle-Methode fördert vor allem die Eigenaktivität der Lernenden, denn alle müssen Verantwortung übernehmen. Auch den sonst eher Schwachen oder Ruhigen kommt eine besondere Rolle zu (vgl. Stangl, 2005).

Die didaktisch-methodische Grundlage des SOL ist das *Sandwichprinzip*. Dieses Prinzip besteht aus einem systematischen Wechsel von individuellen und kollektiven Lernphasen, damit möglichst viele Lernbedürfnisse, Lerntypen und Lernwege angesprochen werden. Dieses Prinzip ist eine lernpsychologisch begründete Ordnungsstruktur für eine zweckmäßige Kombination unterschiedlicher Lernmethoden, wie Partnerinterview, Szenario, Pro und Kontra, Rollenspiel, aber auch Lehrervortrag, Präsentationen oder Schülerreferate (vgl. Herold & Landherr, 2003, S. 8).

Das Thema oder das Projekt wird bei der Planung einer SOL-Einheit in eine nicht-lineare Struktur gebracht. Aus einer „Landkarte“, dem sogenannten *Advance Organizer*, werden die Zusammenhänge des Themas dargestellt, um somit den Lernenden einen Überblick über das zu behandelnde Thema zu gewährleisten. Mögliche Elemente des Advance Organizers sind Bilder, Grafiken, Begriffe und kurze Texte. Die Erarbeitung erfolgt als

erstes in Stamm- und Expertengruppen, anschließend wird das Sandwichprinzip eingesetzt, sodass die Vertiefung des Themas in verschiedenen Sozialformen mit unterschiedlichen Methoden erfolgt. Diese klare Strukturierung von SOL erleichtert den Lehrenden aber auch den Lernenden den Einstieg in eigenverantwortliches, selbst organisiertes Lernarrangements (vgl. Herold & Landherr, 2003, S. 4).

In Abbildung 9 wird dem „Lehrerzentrierten Unterricht“ das SOL gegenübergestellt.

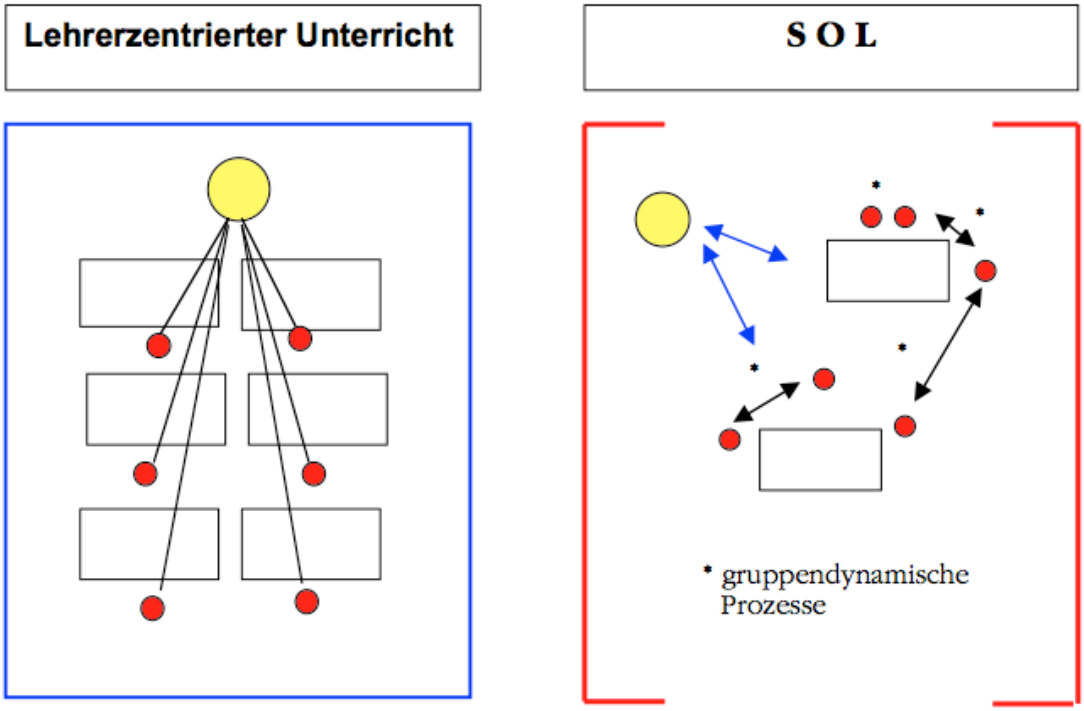



Abbildung 9: Gegenüberstellung Lehrerzentrierter Unterricht – SOL

Beim Lehrerzentrierten Unterricht hat die Lehrkraft sozusagen „alle Fäden in der Hand“. Zu den wichtigsten lehrerzentrierten Unterrichtsformen werden Frontalunterricht und fragend-entwickelter Unterricht gezählt. Die LehrerInnen übernehmen dabei die Rolle bei der Auswahl der Lerninhalte und steuern Arbeits-, Interaktions- und Kommunikationsprozesse. Der Lernverband – die Klasse – wird gemeinsam unterrichtet, während beim SOL die zentralen Steuerungsimpulse von den Lernenden kommen (vgl. Meyer, 1995, S. 183). SchülerInnen arbeiten hier selbstständig an Aufgabenstellungen oder Arbeitsplänen. Die LehrerInnen stehen nicht mehr im Mittelpunkt und können den Freiraum für eine individuelle Beratung und Unterstützung nützen (vgl. Herold & Landherr, 2003, S. 12).

# 3. E-Learning und Lernpfade

In diesem Kapitel werden die Termini „*E-Learning*“ und „*Lernpfade*“ behandelt. Anschließend werde ich darauf eingehen, was beim Einsatz von Lernpfaden im Unterricht zu beachten ist. Außerdem werde ich Essentielles bei der Gestaltung und Planung von Lernpfaden im Unterricht zusammenfassen und einige Vorteile für den Einsatz im Unterricht anführen.

## *3.1. Begriffsklärung: E-Learning*

In der Literatur gibt es unterschiedliche Schreibweisen von *E-Learning*, wie „eLearning“, „ELearning“, „E-Lernen“ etc. Da die Schreibweise „***E-Learning***“ die am häufigsten verwendete zu sein scheint, werde ich in der vorliegenden Diplomarbeit nur diese verwenden.

Für Stangl (2011) ist E-Learning (electronic learning) im allgemeinen Sinne betrachtet, eine besondere Form des computerunterstützten Lernens, bei der Lernsysteme und -materialien in digitaler Form angeboten werden, sich durch Multimedialität auszeichnen, eine Interaktivität zwischen den Lernenden, dem System, den Lehrenden und den Mitlernenden unterstützen und jederzeit online für den Nutzer verfügbar sind.

Kerres versteht hinsichtlich des pädagogischen Aspekts des Lernens unter E-Learning:

> *„alle Formen des Lernens, bei denen digitale Medien für die Präsentation und Verbreitung von Lernmaterialien und zu Unterstützung zwischenmenschlicher Kommunikation zum Einsatz kommen“ (Kerres zit. nach Stangl, 2006).*

Betrachtet man den Begriff E-Learning unter Einbezug einer technischen Komponente, so findet man in der Literatur folgende Definition des Massachusetts Institute of Technology (MIT):

> *„Term covering a wide set of applications and processes, such as web-based learning, computer-based learning, virtual classrooms, and digital collaboration. It includes the delivery of content via Internet, intranet/extranet (Lan/Wlan), audio- and videotape, satellite broadcast, interactive TV, CD-Rom, and more“ (elearning-wiki, 2009).*

Für den Begriff E-Learning findet man zahlreiche, teilweise auch sehr unterschiedliche Definitionen in der Literatur. Lehmann (2002, S. 323) trifft diese Tatsache mit folgendem Zitat sehr gut:

> *„E-Learning ist die Chiffre bzw. das Etikett, hinter dem sich zum Teil sehr heterogene Ansätze und Vorstellungen der Mediennutzung verbergen“.*

Zusammenfassend kann man dennoch sagen, dass alle Definitionen das gestützte Lernen mit Hilfe von digitalen Medien, im online aber auch offline Gebrauch inkludieren.

E-Learning wird oft schon als solches bezeichnet, auch wenn nur Arbeitsmaterial hoch- oder heruntergeladen wird (vgl. elearning, 2009). Seufert, Back und Häusler geben demnach eine weitere Definition, um dieser Auffassung entgegen zu wirken:

> *„E-Learning kann begriffen werden als das Lernen, das mit Informations- und Kommunikationstechnologien unterstützt bzw. ermöglicht wird. Wichtig ist, dass diese Technologien mit dem Lernprozess selbst unmittelbar verbunden sind und nicht nur rudimentäre Hilfsmittel darstellen“ (elearning, 2009).*

Aus einem Leitfaden der Kammer für Arbeiter und Angestellte für Wien (2011, S. 6ff) über E-Learning geht folgende Begriffsdefinition hervor:

> *„E-Learning basiert – [...] – auf der Nutzung moderner Informations- und Kommunikationstechnologien für den Zugang zu Bildung und das Lernen selbst, also für die Aneignung von Wissensinhalten“*

Es ist unklar, ob der Begriff E-Learning nur für „online“-Lernen verwendet werden sollte, oder ab welchem Zeitpunkt man eigentlich von E-Learning sprechen kann. Anfangs stand das „E“ für elektronisch unterstütztes Lernen, wobei Augenmerk auf dem technischen Aspekt gelegt wurde und interaktives Fernsehen, satellitengestütztes Lernen oder der Einsatz von Video für einen Umschwung im Bildungsbereich sorgen sollte. Doch elektronische Hilfsmittel und Medien werden schon länger eingesetzt, da dazu auch Sprachkassetten für das Erlernen von Sprachen zu Hause oder Lehrvideos und Schulungsfilme zu bestimmte Inhalten zählen. Als Mitte der 90er Jahre das Internet endgültig Einzug hielt, setzte auch ein Boom der „e“-Worte ein, wobei zu dieser Zeit unter E-Learning meist nur das Lernen mit dem Internet verstanden wurde. Heute umfasst der Begriff nicht nur das „Online“-Lernen, sondern weit aus mehr Formen des Lernens, die durch Medien, Informations- und Kommunikationstechnologien unterstützt werden. Dadurch entfalteten sich verschiedene Schlagwörter für den Terminus E-Learning (Kammer für Arbeiter und Angestellte, 2011, S. 10f):

- Telelernen, Tele-learning, Tele-teaching, Tele-tutoring
- Computer-unterstütztes Lernen (CUL)
- Web-based-learning, Web-learning, Web-based-training (WBT)
- Computer-based-training (CBT)
- Computer aided learning (CAL), Computer aided teaching (CAT)
- Distance learning, Distance training
- Open and distance learning (ODL)
- Blended Learning
- Online Learning, Online training
- u.v.m.

E-Learning entwickelt sich immer mehr und mehr zu einem bedeutungsvollen Instrument im Unterricht. Das Lehren und Lernen soll mit E-Learning und dem Einsatz von neuen Medien optimiert werden. Natürlich hat dies nicht automatisch ein effizienteres Lernen zur Folge. Erst wenn Medienpädagogik, Didaktik, Methodik, Organisation und der Inhalt bestmöglich geplant sind, können SchülerInnen im Lernprozess unterstützt werden. Mit den Lernpfaden, des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ (siehe Abschnitt 6.1) sollen die Möglichkeiten von E-Learning genutzt werden.

## *3.2. Begriffsklärung: Lernpfade*

Ein Lernpfad besteht in technischer Hinsicht aus nichts anderem als aus einzelnen geplanten Lernschritten, die anschließend zu einer Gesamtheit oder Einheit zusammengefügt werden (vgl. Oberhuemer et al., 2010a, S. 3). Lernpfade setzen sich meist aus vielen interaktiven Materialien wie Applets und Quizzes zusammen. Ein einzelner Lernschritt besteht nur aus einer kleinen Aufgabe, die entweder aus elektronischen Lernhilfen besteht, aus weiterführende Links oder konkreten Aufgabenstellungen. Darüber hinaus lässt sich mathematische Software wie Computeralgebra, dynamische Geometrie oder Tabellenkalkulation im Unterricht sehr effizient einbauen. Ein Lernpfad kann außerdem als ein Instrument betrachtet werden, das die einzelnen Lernobjekte durch Hinzufügen von „*Erläuterungen, Anweisungen, Aufgabenstellungen und Referenzen auf externe Ressourcen in einen konkreten Zusammenhang setzt*“. Demzufolge dienen Lernpfade dazu, einzelne Lernhilfen zu einer

Einheit zu integrieren und Lernprozesse zu gestalten. Sie arrangieren ferner eine Lernumgebung durch ergänzende Funktionalität, wie beispielsweise das Bilden von Lerngruppen oder die Verwendung von Lernprotokollen (vgl. Embacher & Oberhuemer, 2006, S. 207).

## *3.3. Lernpfade & E-Learning im Unterricht*

Zu Beginn dieses Abschnitts werde ich der Frage nachgehen, ob Lernpfade als Komponente von E-Learning angesehen werden können. Anschließend werde ich auf einen problemlosen Einsatz von Lernpfaden im Unterricht eingehen.

Nach Weigl sind Lernpfade ein Teil von E-Learning (vgl. Weigl zit. nach Heimlich, 2009, S. 20). Lernpfade stellen eine Form des computergestützten Lernens mit Hilfe von Multimedia- und Netzwerktechnologien dar, mit der das E-Learning oft verbunden wird (vgl. Brockhaus zit. nach Heimlich, 2009, S. 20).

Damit der Einsatz von Lernpfaden im Unterricht problemlos erfolgen kann und das Lernen und Lehren effektiv ist, muss die Lehrkraft einige wichtige *organisatorische* und *inhaltliche* Aspekte berücksichtigen. Von *organisatorischer* Seite betrachtet, müssen Lehrende folgende Fragen klären (vgl. Oberhuemer et al., 2010a, S. 3f): Wie lange soll die Unterrichtsphase mit Lernpfaden dauern? Stehen Computer während der gesamten Phase zur Verfügung? Wie verlässlich sind das Schulnetzwerk und das Internet bzw. stehen Ersatzprogramme zur Verfügung? Wie gut sind die Computerkenntnisse der SchülerInnen? Ist eine Einführungsphase notwendig?

Nachdem diese Fragen geklärt wurden, muss man sich dem inhaltlichen Aspekt widmen und klären, welche Dauer die einzelnen Lernschritte in Anspruch nehmen, damit nicht zu viele Unterrichtseinheiten benötigt werden. Welche Lernziele werden angestrebt bzw. wie erfolgt die Beurteilung dieser Unterrichtsphase? Sollen Lerntagebücher (schriftlich oder am Computer) verwendet werden? Wie schafft man sich einen Überblick über die einzelnen Lernfortschritte der SchülerInnen (vgl. Stepancik, 2004)?

Außerdem soll man sich auf die Suche machen, ob bereits ein passender Lernpfad existiert, der den eigenen Plänen entspricht. Ist dies nicht der Fall, kann man einfach einen Lernpfad erstellen, der den eigenen Wünschen entspricht (vgl. Oberhuemer et al., 2010a, S. 3).

Auf die Erstellung eines Lernpfads werde ich jedoch hier nicht weiter eingehen, da dies den Rahmen der Diplomarbeit sprengen würde.

## 3.4. Gestaltung und Planung von Lernpfaden

Lernpfade eignen sich für den Mathematikunterricht sehr gut, da die mathematischen Stoffgebiete stark aufbauend sind und die Lerninhalte immer komplexer und vernetzter werden. Die vernetzte Struktur der Mathematik kann durch den Einsatz von Lernpfaden besser durchblickt und verstanden werden. Die Gestaltung der Lernpfade stellt jedoch gerade wegen dieser vernetzten Struktur der Mathematik eine gewisse Herausforderung da, weil der Kern der Gestaltung ein Versuch ist herauszufinden, „*was gelernt werden soll und wie es am besten gelernt werden kann*“ (vgl. Embacher, 2004b).

Bei der Planung eines Lernpfads muss man sich vorrangig über das Thema Gedanken machen. Nicht jedes Thema eignet sich gleich gut für ein eigenständiges, eigenverantwortliches sowie exploratives Arbeiten. Wichtig bei der Planung eines Lernpfads ist, dass die Lernziele festgelegt werden und man über Differenzierungsmöglichkeiten nachdenkt, wie man beispielsweise Wahl- und Pflichtaufgaben, unterschiedliche oder abwechselnde Lernsoftware einbauen und zusätzliche Aufgaben erstellen kann (vgl. Stepancik, 2004).

Aus meiner eigenen Erfahrung, der Überarbeitung eines Lernpfads zur Vektorrechnung (siehe Abschnitt 6.5.3), weiß ich, dass die Auswahl der Lernhilfen und –materialien, wie interaktive Applets, Links auf Webseiten, oder der Einsatz von lediglich Bildern sehr schwierig ist, und man sich stets vor Augen halten muss, welche Materialien für den Lernprozess am effektivsten sind.

Grundsätzlich gibt es unterschiedliche Arten von Lernpfaden. Embacher *(2004b)* unterscheidet, je nach Sinn des Einsatzes, fünf Typen von Lernpfaden:

- *„Lernpfade zur Organisierung projektartiger Phasen im Unterricht*
- *Lernpfade zur (durchaus auch längerfristigen) Bereitstellung von Ressourcen, Aufgabe, Begriffsdefinitionen,...*
- *Lernpfade zur Wiederholung*
- *Lernpfade als Selbstlernmodule („Crashkurse“)*
- *Lernpfade als Unterstützung von Lehrveranstaltungen in Universitäten, Fachhochschulen, pädagogischen Akademien, im Zweiten Bildungsweg,...“*

Da SchülerInnen bei Lernpfaden stets mathematische Inhalte selbst erforschen und entdecken, wird der Lehrer mehr zum Lernorganisator und tritt eher in den Hintergrund. Durch den Einsatz von Lernpfaden bekommt der Unterricht Projektcharakter.

SchülerInnen können das Lerntempo selbst bestimmen. Durch das selbstgesteuerte und eigenverantwortliche Lernen tritt die Notwendigkeit ein, dass SchülerInnen den eigenen Lernprozess und Lernfortschritt mit Einbezug eines Lernprotokolls oder Lerntagebuchs dokumentierten.

Aus bisherigen Erfahrungen im Unterricht kann man sagen, dass der Wissenserwerb beim Arbeiten mit einem Lernpfad nachhaltiger, jedoch nicht schneller ist. Ein großer Vorteil für SchülerInnen ist die ständige Verfügbarkeit der Unterrichtsmaterialien. Lernpfade können je nach Wunsch als Fernlernen (z.B. in den Ferien, zur Maturavorbereitung, etc.) genutzt werden. So können Lernpfade für verschiedene Zwecke konzipiert werden (vgl. Oberhuemer et al., 2010a S. 3f).

Der Aufbau eines Lernpfads hängt von den konkreten Lernzielen ab, welche von SchülerInnen erreicht werden sollen. Außerdem spielt die bevorzugte Sozialform und die Lernzeit eine wesentliche Rolle. Der Lernpfad soll möglichst übersichtlich gestaltet werden, dies kann mit der Unterteilung in einzelne Kapitel geschaffen werden. Über diese Kapitel sollten die SchülerInnen einen möglichst guten Überblick bekommen, um sich die zur Verfügung stehende Zeit gut einteilen zu können. Generell soll den SchülerInnen konkret gesagt werden, was von ihnen erwartet wird, deshalb sollen die einzelnen Aufgabenstellungen (Lernschritte) klar und offen formuliert sein. „Wichtiges“ soll von „Zusätzlichem“ unterschieden werden und dementsprechend markiert werden (Wahl- oder Pflichtaufgabe). Hinzu kommt, dass beim Arbeiten mit einem Lernpfad die Dokumentationsform gut zum Vorschein gebracht wird, und SchülerInnen stets wissen, wann etwas aufgezeichnet werden muss (vgl. Oberhuemer et al., 2010b S. 1).

## *3.5. Vorteile des Einsatzes von Lernpfaden*

Warum man Lernpfade im Unterricht einsetzen soll bzw. welche Vorteile das Arbeiten mit didaktisch sinnvoll gestalteten Lernpfaden mit sich bringt, möchte ich im Folgenden erläutern (vgl. Embacher & Oberhuemer, 2006, S. 208):

- Das Arbeiten mit Lernpfaden fördert vor allem die Selbsttätigkeit und die Eigenverantwortlichkeit der Lernenden.
- Außerdem unterstützen Lernpfade längerfristige Lernprozesse und Gedächtnisleistungen und zahlreiche fachliche aber auch überfachliche Kompetenzen, besonders durch die Dokumentationsform eines Lerntagebuchs.

- Das Konzept der Lernpfade berücksichtigt die Unterschiedlichkeit der Ausbildungswege und Lehrmethoden, da sie ein sehr breites Einsatzspektrum besitzen.
- Darüber hinaus bieten Lernpfade eine einheitliche Einstiegsumgebung bei inhaltlicher und medialer Vielfalt an.
- Lernpfade beinhalten meist kontextbezogene Informationen für Lehrende, wie zum Beispiel „externe“ Lernhilfen, welche mit Aufgabenstellungen verbunden werden können. Es können auch Lernhilfen dokumentiert oder der Anwendungsbezug kontextualisiert werden.
- Lernpfade zwingen zur Offenlegung von Lernstoff, Lernzielen, Schwierigkeitsgrad, Spielregeln. Informationen zu Beginn des Lernpfads können SchülerInnen nutzen, um bereits vorhandenes Vorwissen einzuordnen.
- Lernpfade sind für Lernende stets verfügbar.
- Zuletzt können Lernpfade Bestandteil des Fernlernens sein und das selbstgesteuerte Lernen fördern.

# 4. Kompetenzen und Bildungsstandards im Unterricht

In Österreich, aber auch zahlreichen anderen Ländern, sind LehrerInnen dazu befähigt, Berechtigungen beim Abgang der SchülerInnen zu vergeben. Damit ist der Übertritt in eine andere Schule oder die Berechtigung zur Hochschulreife gemeint. Es ist keines Falls selten, dass das Wissen und Können von SchülerInnen verschiedener Schultypen bei identer Beurteilung eine sehr große Bandbreite aufweist.

Das österreichische Unterrichtsministerium versucht nun durch die Einführung von Bildungsstandards eine bessere Vergleichbarkeit an den Schnittstellen des Bildungssystems zu erzielen und die hohe Bedeutung von Qualitätssicherung und Qualitätsentwicklung schulischer Arbeit noch deutlicher darzustellen (vgl. Siller, 2008b, S. 1).

Was versteht man eigentlich unter Bildungsstandards?

Bildungsstandards sind konkret ausformulierte Lernergebnisse, welche sich aus den Lehrplänen der einzelnen Schulstufen ableiten lassen. Diese definieren *Kompetenzen*, die in der Regel von allen SchülerInnen an den Schnittstellen des Schulsystems angestrebt und erreicht werden sollen.

Bildungsstandards sollen darüber hinaus auch eine gewisse Orientierungshilfe für LehrerInnen darstellen. Sie geben darüber Auskunft, was SchülerInnen zu bestimmten Zeitpunkten ihrer Schullaufbahn können sollen und definieren die Zielsetzungen des Lehrplans (vgl. bifie, 2010, S. 5).

Was sind aber nun diese Fertigkeiten und Fähigkeiten, die sogenannten Kompetenzen, welche junge Menschen nach der schulischen Ausbildung besitzen sollen? Darauf werde ich im nächsten Abschnitt (4.1) näher eingehen und die Frage „Was sind Kompetenzen?“ beantworten.

## *4.1. Kompetenzen*

Währen der Recherche zur Begriffsklärung wurde mir klar, dass der Begriff „Kompetenz“ ein sehr vielschichtiger und weitläufiger Begriff ist. Ich werde hier die Definition nach *Weinert* erläutern, da diese inzwischen zu einem Referenzzitat geworden ist, auf das sich viele Kompetenzmodelle beziehen (vgl. Klieme, 2004, S. 2), wie es beispielsweise auch

das Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulsystems (bifie) in der Broschüre „Bildungsstandards in Österreich“ (2010, S. 6) getan hat.

Weinert (2001, S. 27f) definiert den Begriff „Kompetenz“ als:

> *„die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen (d.h. absichts- und willensbezogenen) und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (Weinert, 2001, S. 27f).*

Kurz gesagt sind unter Kompetenzen, nach dieser Definition, Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Bewältigung von Aufgaben und Problemstellungen zu verstehen. Nach der Definition von Weinert (2001, S. 27f) muss ein Kompetenz-Konzept folgende Merkmale umfassen:

- Kompetenzen sind auf Individuen bezogen,
- Kompetenzen sind erlernbar,
- Kompetenzen sind kognitive, motivationale, volitionale und soziale Fähigkeiten und Fertigkeiten,
- diese kognitiven, motivationalen, volitionalen und sozialen Fähigkeiten und Fertigkeiten ermöglichen in ihrem Zusammenwirken erfolgreiches und verantwortungsvolles Problemlösen.

Die erwarteten Fähigkeiten und Fertigkeiten, die SchülerInnen im Unterricht erwerben und auch sichern sollen, spiegeln sich in den einzelnen Kompetenzmodellen wieder (vgl. bifie, 2010, S. 7).

Das folgende Kompetenzmodell, welches die grundlegenden vier zu erwerbenden Kompetenzen im Unterricht darstellt, ist das in Abbildung 10 abgebildete Modell nach Meiser (vgl. Meiser, 2011):

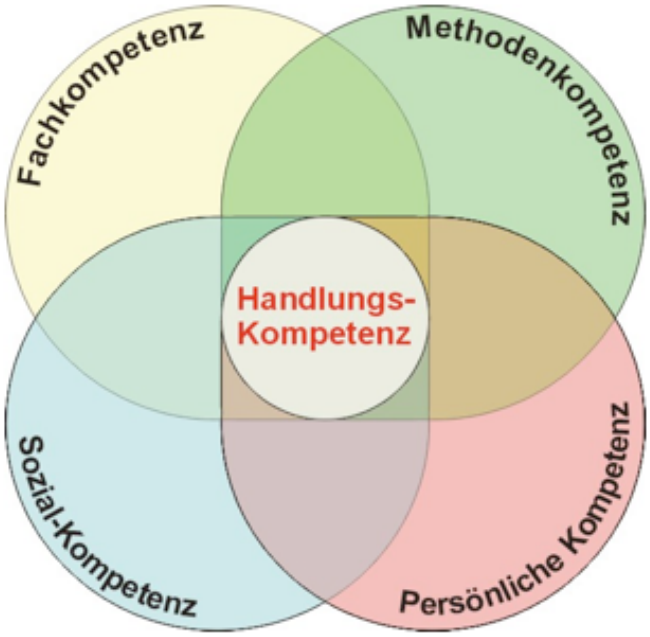



Abbildung 10: Kompetenzbereiche (Meiser, 2011)

Fachkompetenz wird erworben, wenn SchülerInnen fähig sind, Gelerntes anzuwenden und sachgerecht einsetzen zu können, Sozialkompetenz, wenn SchülerInnen mit anderen gemeinsam lernen und leben können. Wird Persönlichkeitskompetenz erworben, übernehmen LernerInnen Eigenverantwortung über das Wissen und über eigene Fähigkeiten und Stärken. Methodenkompetenz wird erworben, indem SchülerInnen eigenständig am Lernprozess mitwirken (vgl. ZUM, 2011a)

Aufgrund der Wichtigkeit fachbezogener Fähigkeiten und Wissen sind Kompetenzen von Fach zu Fach zu konkretisieren. Dies geschieht in den Bildungsstandards der entsprechenden Fächer (vgl. ZUM, 2011b). Bildungsstandards beschreiben sozusagen die personalen, sozialen, methodischen und fachlichen Kompetenzen, die zu bestimmten Zeitpunkten erreicht werden sollen (vgl. Storz, 2009 S. 98).

Im Folgenden werde ich auf die Bildungsstandards im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II (SK II) näher eingehen, welche Kompetenzen SchülerInnen also am Ende der 4., 8. und 12. bzw. 13. Schulstufe erworben haben sollen.

## 4.2. Bildungsstandards im Mathematikunterricht

Das österreichische Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur stellt in einer Broschüre (bmukk, 2009, S. 4) über Neuerungen im Unterrichtswesen den Begriff Bildungsstandards vor. Bildungsstandards beziehen sich hierbei auf den gesamten Lehrplan der entsprechenden Schulart bzw. Schulstufe. Sie sind präzise und detailliert ausformulierte Lernergebnisse. Zur Erreichung benötigen SchülerInnen grundlegende Kompetenzen. Die Aufgabenstellungen bezüglich der Standardüberprüfung werden durch das bmukk zur Verfügung gestellt, wobei aber das Bildungsinstitut bifie maßgeblich mitwirkt.

Wie bereits in diesem Kapitel erwähnt, geben Bildungsstandards nicht nur Informationen über den Kompetenzstand der SchülerInnen, sondern erfüllen über dies hinaus, noch drei weitere Funktionen:

Bildungsstandards erfüllen die Funktion der ***Ergebnisorientierung***. Da die Lehrkraft den Unterricht während der gesamten Ausbildung auf die Erreichung der Lernergebnisse auszurichten hat, muss diese auch zwischenzeitig den Leistungsstand der SchülerInnen, bezüglich Bildungsstandards feststellen.

Außerdem übernehmen die Standards eine ***gezielte Förderung der SchülerInnen.*** Die Lehrkraft hat zur Aufgabe, die tatsächlich erreichten Lernergebnisse zu analysieren. Haben SchülerInnen Schwierigkeiten, ein Lernziel zu erreichen, müssen Lehrende diese SchülerInnen dementsprechend fördern und unterstützen.

Bildungsstandards tragen auch zur ***Qualitätsentwicklung an Schulen*** bei. Da die Überprüfungen der Standards eine Rückmeldung über die Kompetenzen der einzelnen SchülerInnen liefern, ermöglicht es diese Überprüfung den Schulen, diese Rückmeldung als Feedback zu sehen und deren Schwächen und Stärken zu erkennen und dementsprechend Verbesserungsmaßnahmen zu treffen (vgl. bmukk, 2009, S. 5).

Die Bildungsstandards leiten sich, wie zu Beginn in diesem Abschnitt erwähnt, aus den österreichischen Lehrplänen der einzelnen Schulstufen ab. Sie treten sozusagen nicht in eine konkurrierende oder widersprüchliche Position, sondern ergänzen sich wahrhaftig (vgl. bifie, 2010, S. 7).

Die Kompetenzmodelle sind nach oben hin durchlässig, was bedeutet, dass das Kompetenzmodell M8, das Modell für die Standards am Ende der 8. Schulstufe, das Kompetenzmodell M4, also das Modell für die Standards am Ende der 4. Schulstufe beinhaltet bzw. Teile des Kompetenzmodells M8 abdeckt (vgl. Siller, 2008a, S. 10).

Die österreichweite Überprüfung der Bildungsstandards in der 4. und 8. Schulstufe startet im Schuljahr 2012/13 bzw. 2011/2012 (vgl. bifie, 2011).

Für die 12. Schulstufe ist für die Überprüfung der Kompetenzen eine standardisierte schriftliche Reifeprüfung anhand zentral gestellter Aufgaben vorgesehen.

Die zentrale fachdidaktische Herausforderung des Projekts „standardisierte schriftliche Reifeprüfung“ liegt in:

> *„der Identifizierung und Konkretisierung sowie Operationalisierung jener Grundkompetenzen, die auf wesentliche inhaltliche Bereiche der Mathematik in der Oberstufe fokussieren und aufgrund ihrer fachlichen sowie gesellschaftlichen Relevanz grundlegend, unverzichtbar und zugleich einer punktuellen schriftlichen Überprüfung zugänglich sind“ (Dangl et al., 2009, S. 13).*

Der Ausgangspunkt für die Identifizierung der Grundkompetenzen ist wie bei den Bildungsstandards der 4. bzw. 8. Schulstufe der Lehrplan.

Welche Grundkompetenzen, speziell für den Inhaltsbereich Algebra und Geometrie in Bezug auf Vektoren, für die 12. Schulstufe ausgearbeitet wurden bzw. wie die „neue“ Reifeprüfung ablaufen soll, werde ich im Folgendem erklären. Ich werde im Zuge dieser Diplomarbeit nur auf den Inhaltsbereich „Algebra und Geometrie“ eingehen, insbesondere auf Vektoren, da dies den Themenbereich des Lernpfads, welcher in Abschnitt 6.5.3 erläutert wird, abdeckt.

SchülerInnen sollen zum Thema Vektoren folgende Grundkompetenzen besitzen (Dangl et al., 2009, S. 13):

- *„Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen können und im Kontext interpretieren können.*
- *Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) interpretieren und verständig einsetzen können.*
- *Definition der Rechenoperationen (Addition, Multiplikation mit Skalar [...]) kennen, Rechenoperationen (auch geometrisch) deuten können“*

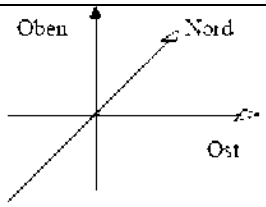
Eine prototypische Aufgabe aus dem Projektbericht für standardisierte schriftliche Reifeprüfung Mathematik (Dang et al., 2009, S. 19) zum Thema Vektoren stellt Tabelle 2 dar. SchülerInnen müssen dabei die richtigen Antworten ankreuzen und den Sachverhalt der Vektorrechnung verstehen:

| | zutreffend | nicht zutreffend |
|---|---|---|
| Jedem Punkt der Ebene entspricht genau ein Vektor aus $IR^2$. | | |
| Jedem Pfeil der Ebene entsprechen unendlich viele Vektoren aus $IR^2$. | | |
| Jedem Vektor aus $IR^2$ entspricht genau ein Punkt und genau ein Pfeil der Ebene. | | |
| Es gibt unendliche viele Vektoren aus $IR^2$, denen derselbe Pfeil der Ebene zugeordnet wird. | | |
| Es gibt unendlich viele Pfeile der Ebene, denen derselbe Vektor aus $IR^2$ zugeordnet wird. | | |
| Es gibt einen Punkt und einen Pfeil der Ebene, denen derselbe Vektor aus $IR^2$ zugeordnet wird. | | |

Tabelle 2: Aufgabenstellung Prototyp I

Eine etwas andere Aufgabe (siehe Abbildung 11) ist die Aufgabe von zwei Flugzeugen aus dem prototypischen Aufgaben:

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem im Raum, der Koordinatenursprung liegt im Tower eines Flughafens.




$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ost \\ Nord \\ Oben \end{pmatrix}$$

Um 8.00 Uhr befindet sich ein Flugzeug der AUA im Punkt A = (-5; -9; 9,6), eine Minute später im Punkt B = (5; 1; 9,6); ein Flugzeug der Lufthansa befindet sich um 8.00 Uhr im Punkt C = (13; 33; 10), eine Minute später im Punkt D = (19; 27; 9,8).
Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1 km.
Beide Flugzeuge halten die nächsten Minuten Kurs und Geschwindigkeit.

*Aufgabenstellungen*

a) Wie schnell fliegen die beiden Flugzeuge?

b) Haben die beiden Flugbahnen einen Schnittpunkt? Werden die beiden Flugzeuge kollidieren? Begründen Sie!

Abbildung 11: Aufgabenstellung Prototyp II

Mit solchen zentral gestellten Aufgaben versucht man eine bundesweite Vereinheitlichung der objektiven Leistungsanforderung zu schaffen. Außerdem wird ein transparenter und einheitlicher Kanon gemeinsam erteilter mathematischer Kompetenzen gesichert.

# 5. Vektorrechnung im Unterricht

Grundsätzlich lässt sich die Mathematik in einzelne Teilgebiete, wie Lineare Algebra, Analysis, Geometrie, Stochastik etc. gliedern (Wikipedia, 2011). In der Volksschule wird zwar der Mathematikunterricht meist nur „Rechnen“ genannt, in der Unter- und Oberstufe jedoch kann man oft die oben genannten Einteilungen der Mathematik vorfinden. Sieht man sich die Lehrpläne, vor allem die der Oberstufe, an, findet man eine Unterteilung der Mathematik in Analysis, Lineare Algebra und Stochastik .

In der analytischen Geometrie, welche wiederrum ein Teilgebiet der linearen Algebra ist, ist die Vektorrechnung ein grundlegendes Gebiet. Die Vektorrechnung ermöglicht viele Rechnungen der analytischen Geometrie vereinfacht darzustellen.

Um einen Einblick zu erlangen, in wie weit die Thematik der Vektorrechnung in der Schulmathematik eine Rolle spielt, möchte ich beispielhaft auf den Lehrplan der AHS Oberstufe eingehen. Anschließend werde ich eine grundlegende Einführung der Vektorrechnung im Mathematikunterricht näher erläutern sowie didaktische Betrachtungsweisen anführen und auf mögliche Probleme bei der Einführung der Vektorrechnung eingehen.

## *5.1. Lehrplanbezug*

Seit 2007/2008 gilt ausnahmslos der neue Oberstufenlehrplan, welcher 2004 veröffentlicht wurde (vgl. bmukk, 2004a, S. 3). Der alte Lehrplan aus dem Jahre 1989, enthielt detailliertere Stoffangaben, aus welchen LehrerInnen für ihre Unterrichtsgestaltung auswählen konnten. Die neuen Lehrpläne beschränken sich nur mehr auf das Wesentliche, was auf die Zunahme der Wissensinhalte und der Gestaltungsfreiheit im Zuge der Schulautonomie zurückzuführen ist.

Ich werde im Folgenden nun jenen Lehrplanbezug herstellen, den der im Rahmen dieser Arbeit behandelte Lernpfad „Vektorrechnung in der Ebene“ (Abschnitt 6.5.3) abdeckt. Zu Beginn wird der allgemeine Teil des Lehrplans behandelt und anschließend der fachdidaktische Teil.

### 5.1.1. Allgemeiner Teil

Der Lernpfad „Vektorrechnung in der Ebene“ entspricht den Aufgaben allgemein bildender höherer Schulen:

> *„Die allgemein bildende höhere Schule hat [...] an der Heranbildung der jungen Menschen mitzuwirken, nämlich beim Erwerb von Wissen, bei der Entwicklung von Kompetenzen und bei der Vermittlung von Werten. Dabei ist die Bereitschaft zu selbständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern. Die Schülerinnen und Schüler sind in ihrem Entwicklungsprozess zu einer sozial orientierten und positiven Lebensgestaltung zu unterstützen“* (bmukk, 2004b, S. 1).

Außerdem wurde bei der Erstellung sowie bei der Überarbeitung des Lernpfads und der Begleitmaterialien im Zuge des Medienvielfaltsprojekt (siehe Abschnitt 6.1) auf den Genderaspekt großen Wert gelegt, da bei diesem Projekt die Gleichstellung eine besondere Rolle spielt. So wird auch dieser sehr wichtige Punkt aus dem aktuellen Lehrplan mit diesem Lernpfad abgedeckt.

Auf die steten Entwicklungen der Informations- und Kommunikationstechnologien, sowie der Massenmedien ist im Unterricht ebenfalls einzugehen:

> *„Im Rahmen des Unterrichts ist diesen Entwicklungen Rechnung zu tragen und das didaktische Potenzial der Informationstechnologien bei gleichzeitiger kritischer rationaler Auseinandersetzung, mit deren Wirkungsmechanismen in Wirtschaft und Gesellschaft nutzbar zu machen. Den Schülerinnen und Schülern sind relevante Erfahrungsräume zu eröffnen und geeignete Methoden für eine gezielte Auswahl aus computergestützten Informations- und Wissensquellen zur Verfügung zu stellen“ (bmukk, 2004a, S. 2).*

Der Lernpfad berücksichtigt außerdem einen fächerübergreifenden und fächerverbindenden Aspekt. Anwendungsbeispiele aus der Physik bzw. dem alltäglichen Leben tragen hierzu bei.

Schülerinnen und Schüler sollen im Zuge eines lebensbegleitenden Lernens zu einer selbstständigen, aktiven Aneignung und kritisch prüfenden Auseinandersetzung mit dem Wissen befähigt und ermutigt werden:

> *„Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, in altersadäquater Form Problemstellungen zu definieren, zu bearbeiten und ihren Erfolg dabei zu kontrollieren“ (*bmukk*, 2004a, S. 3).*

Besonders auf diesen Aspekt wurde bei der Erstellung des Lernpfads eingegangen. Durch unterschiedliche Aufgaben und Problemstellungen im Lernpfad sollen SchülerInnen

versuchen, eine mögliche Lösung auf unterschiedliche Weise (Berechnen, Aufstellen von Vermutungen, Zusammenhänge erkennen, etc.) zu erarbeiten sowie diese Lösungen anschließend selbstständig (durch die eingebauten Lösungslinks im Lernpfad) zu kontrollieren.

Die auf unterschiedliche Art und Weise erworbene Sachkompetenz im Lernpfad wird durch Personal- und Sozialkompetenz erweitert und ergänzt. Außerdem lernen SchülerInnen:

> *„ [...] mit Sachthemen, mit sich selbst und mit anderen auf eine für alle Beteiligten konstruktive Weise umzugehen. Sie sollen Sachkompetenz, Selbstkompetenz und Sozialkompetenz in einem ausgewogenen Verhältnis entwickeln“ (*bmukk, *2004a, S. 3).*

Das für Lernpfade typische selbstständige und experimentelle Lernen, welches von den angebotenen Unterrichtsvorschlägen begleitet wird (eigenverantwortliches Lernen), spiegelt sich vor allem in diesen Lehrplanforderungen wieder.

Die allgemeinen didaktischen Grundsätze, die der Lernpfad außerdem abdeckt, sind beispielsweise das Anknüpfen an die Vorkenntnisse und Vorerfahrungen der SchülerInnen. Die Einzelarbeit, Gruppen- und Partnerarbeit im Lernpfad fördern Individualisierung und Differenzierung. Auch das unterschiedliche Angebot der Lerntechniken im Lernpfad fördert vor allem das selbstständige Erarbeiten von Kenntnissen und Fertigkeiten sowie eine gewisse Eigenverantwortung. Außerdem wurde besonders bei der Überarbeitung des Lernpfads darauf geachtet, die Beispiele so zu wählen, dass sie einen Bezug zur Lebenswelt der SchülerInnen herstellen und sowohl für Mädchen als auch für Knaben gleichermaßen ansprechend sind. Da die SchülerInnen stets Notizen machen und ein Lernprotokoll führen müssen, ist die Sicherung des Unterrichtsertrags bzw. der Leistungsbeurteilung ebenfalls gewährleistet (vgl. bmukk, 2004a, S. 7ff).

### 5.1.2. Fachbezogener Teil

Der Mathematikunterricht bzw. in diesem Fall der Unterricht mit Einsatz eines Lernpfads soll SchülerInnen zu einem analytischen-folgerichtigen Denken erziehen und mathematische Kompetenzen vermitteln. Zu den mathematischen Kompetenzen gehören jene Kompetenzen, welche sich auf Kenntnisse, auf Begriffe und auf mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen. Diese Kompetenzen äußern sich im Ausführen der folgenden mathematischen Aktivitäten (bmukk, 2004b, S.1):

- *Darstellend – interpretierendes Arbeiten*
- *Formal- operatives Arbeiten*
- *Experimentell – heuristisches Arbeiten*
- *Kritisch – argumentatives Arbeiten*

Die SchülerInnen werden während dem Arbeiten mit dem Lernpfad mit abwechselnden Aufgabenstellungen konfrontiert. Die oben erwähnten Aktivitäten sind keinesfalls selten und werden im Lernpfad abwechselnd erlebt.

Dabei sollen die SchülerInnen die verschiedensten Aspekte der Mathematik erkennen wie beispielsweise den schöpferisch-kreativen, den sprachlichen Aspekt, aber auch den erkenntnistheoretischen und pragmatisch-anwendungsorientierten Aspekt.

Ferner soll der Lernpfad eine Verbindung zu Beiträgen anderer Bildungsbereiche herstellen, wobei folgende Bereiche hervorzuheben sind: *Sprache und Kommunikation, Mensch und Gesellschaft, Natur und Technik und Kreativität und Gestaltung.* Diese Bildungsbereiche werden einerseits durch konkrete Beispiele oder andererseits durch die mathematische Sprache im Lernpfad angesprochen (vgl. bmukk 2004b, S.2).

Anschließend werden die didaktischen Grundsätze, welche mit dem Lernpfad angestrebt werden, angeführt:

Als didaktische Grundsätze im Lernpfad kann das „*Lernen in anwendungsorientierten Kontexten*“, sowie das „*Lernen in Phasen*“ gesehen werden. Der Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene bietet einen Ansatz, die fächerübergreifenden Aspekte zwischen Mathematik und Physik bzw. der Technik hervorzuheben. Auf das erforschende, explorative Arbeiten der SchülerInnen als Einstieg in jedes Kapitel sowie einer abschließenden Phase der Exaktifizierung wurde ebenfalls Wert gelegt. Das „*Lernen im sozialen Umfeld*“ wird durch die begleitenden Unterrichtsvorschläge erfüllt. Die eingesetzten Einzel-, Partner- und Gruppenarbeiten sowie auch Projektarbeiten wurden an Lerninhalten passend abgestimmt.

Da außer dem Schreiben des Lernprotokolls alle Tätigkeiten am Computer zu machen sind, wird das „*Lernen mit technologischer Unterstützung*“ sowie das „*Lernen mit medialer Unterstützung*“ erreicht (vgl. bmukk, 2004b, S. 3).

Abschließend wird der Lehrstoff der 5. Klasse, welcher beim Erarbeiten des Lernpfades abgedeckt wird, angeführt (vgl. bmukk, 2004b, S. 3f):

***Zahlen und Rechengesetze***

- Aufstellen und Interpretieren von Termen und Formeln, Begründen von Umformungsschritten durch Rechengesetze

***Trigonometrie***

- Durchführen von Berechnungen an rechtwinkeligen und allgemeinen Dreiecken

***Vektoren und analytische Geometrie der Ebene***

- Addieren von Vektoren und Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperationen
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie

## *5.2. Einführung der Vektorrechnung*

Im folgenden Abschnitt werde ich die Einführung der Vektorrechnung in der 5. Klasse AHS Oberstufe näher beschreiben, wobei ich aber nur jenen Stoff, den der Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene einschließt, berücksichtigen werde.

### 5.2.1. Vorwissen

Die Einführung der Vektorrechnung baut prinzipiell auf bereits erworbenem Wissen der SchülerInnen aus Vorjahren auf. Deshalb sollten SchülerInnen gewisse Vorkenntnisse mitbringen.

SchülerInnen arbeiten bereits ab der 2. Klasse der AHS Unterstufe mit dem Koordinatensystem. Daher wird vorausgesetzt, dass der Begriff „geordnetes Zahlenpaar“ bekannt ist. Außerdem lernen SchülerInnen Spiegelungen, Verschiebungen (Vektor) und Drehungen im Koordinatensystem kennen. Später in der 3. Klasse werden Pfeile für die graphische Darstellung ganzer Zahlen verwendet. Die Addition zweier ganzer Zahlen, z.B. (-2) + (+5) = (+3) wird in Abbildung 12 und Abbildung 13 dargestellt und lässt sich etwa auf folgende zwei Varianten erklären:

**Variante 1:**

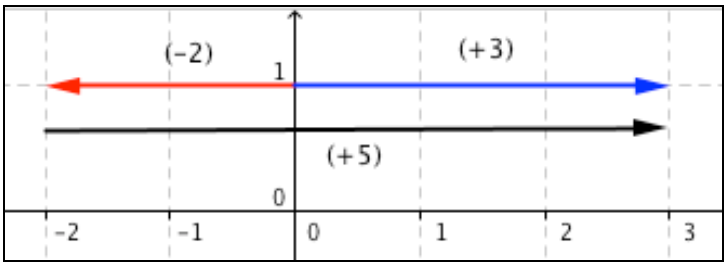



Abbildung 12: Addition zweier ganzer Zahlen

Man kann an den roten (-2)-Pfeil einen schwarzen (+5)-Pfeil anhängen, wodurch man den baluen (+3)-Pfeil erhält.

**Variante 2:**

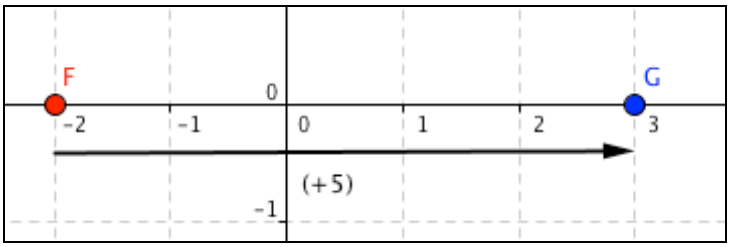



Abbildung 13: Addition zweier ganzen Zahlen

Mann könnte auch von einem Punkt (-2) um (+5) nach rechts gehen, was bedeutet, dass man an einem Punkt (-2) einen (+5)-Pfeil anhängt um so zum Punkt (+3) zu gelangen.

Diese beiden Darstellungen sind in der 3. Klasse durchaus geläufig wobei sich das Vorkommen von Vektoren auf die bloße Darstellung von Pfeilen beschränkt. Erst in der 5. Klasse der AHS Oberstufe lernen SchülerInnen den Begriff „Vektor“ sowie seine Bedeutung kennen (vgl. Bürger & Reichel, 1981, S. 180ff).

### 5.2.2. Einführung des Vektorbegriffs

Mit Hilfe von Koordinaten und Vektoren versucht die Analytische Geometrie geometrische Sachverhalte algebraisch zu beschreiben sowie umgekehrt algebraische Sachverhalte geometrisch zu interpretieren (vgl. Tietze et al., 2000, S. 2).

Für die Art der Einführung des mathematischen Begriffs „Vektor“ im Unterricht kommen verschiedene Zugänge in Betracht (vgl. Tietze et al., 2000, S. 134).

Während in dieser Arbeit als Zugänge das geometrische Modell und das arithmetische Modell behandelt werden, gehe ich auf das formal-axiomatische Modell nicht näher ein, da dieses Modell eher im wissenschaftlichen Lehrbetrieb üblich ist und in der Schule nur die zwei- bzw. dreidimensionalen geometrischen Vektoren verwendet werden (vgl. Tietze et al., 2000, S. 9).

#### *5.2.2.1. Das geometrische Modell*

Vektoren werden als Pfeilklasse bzw. als Verschiebungen definiert.

*Einführung von Vektoren als Pfeilklasse:*

Bei dieser Vorgehensweise wird ein Vektor als Pfeilklasse definiert, also als eine unendliche Menge gleich langer, gleich gerichteter und gleich orientierter Pfeile (siehe Abbildung 14).

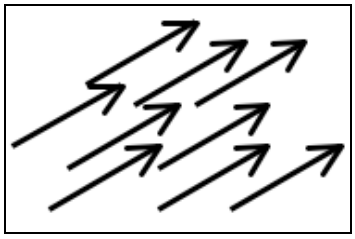


Abbildung 14: Vektor als Pfeilklasse

Jeder Pfeil einer solchen Klasse wird Repräsentant der Pfeilklasse genannt, für welche anschließend Rechenoperationen wie Addition, Subtraktion und Vervielfachung definiert werden (vgl. Malle, 2007, S. 2).

Die zugrundeliegende Äquivalenzrelation der Pfeilklasse wird grundsätzlich nur anschaulich formuliert. Der Beweis, dass es sich tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt, wird in der Schule üblicherweise nicht geführt (vgl. Tietze et al., 2000, S. 134).

*Einführung von Vektoren als Verschiebung:*

Die Parallelverschiebung oder Translation ist eine geometrische Abbildung, welche jeden einzelnen Punkt der Ebene oder des Raumes in dieselbe Richtung und um dieselbe Länge verschiebt (siehe Abbildung 15).

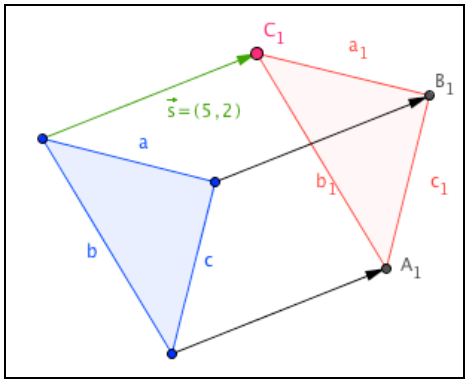



Abbildung 15: Vektor als Verschiebung

Die Menge der gleich langen und gleich gerichteten Pfeile beschreibt diese Verschiebung. Grundsätzlich reicht ein Pfeil aus, um die Verschiebung zu definieren. Der Startpunkt des Pfeils ist für jeden zu verschiebenden Punkt unterschiedlich. Dies führt wieder zur bereits vorhin behandelten Definition des Begriffes „Vektor“: Die Menge aller Pfeile, die gleich lang, zueinander parallel und gleich orientiert sind, heißt Vektor. Ein einzelner Pfeil wird Repräsentant genannt (vgl. Linnemann, 2006, S. 7f).

#### *5.2.2.2. Das arithmetische Modell*

Vektoren werden als Zahlenpaare (bzw. Zahlentripel) reeller Zahlen eingeführt und anschließend geometrisch als Punkte bzw. Pfeile im Koordinatensystem (siehe Abbildung 16) interpretiert. Das Rechnen mit Vektoren wird als eine Erweiterung des Rechnens mit Zahlen verstanden (vgl. Tietze et al., 2000, S. 134).

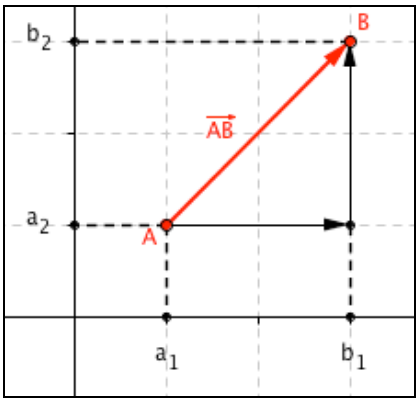



Abbildung 16: Vektor als Zahlenpaar

Rechenoperationen werden in folge dessen arithmetisch interpretiert und geometrisch dargestellt. Die bereits vertrauten Rechenregeln der reellen Zahlen werden auf die

Zahlenpaare im Sinne eines komponentenweise Arbeitens übertragen (vgl. Tietze et al., 2000, S. 139).

### 5.2.3. Vektorbegriff im Lernpfad

Im von mir bearbeiteten Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene (siehe Abschnitt 6.6) beginnt die Einführung anhand eines anwendungsorientierten Beispiels. In diesem Beispiel (siehe Abschnitt 6.5.3 Abbildung 25) kann man leicht sehen, dass die Beschreibung dieses konkreten Sachverhalts mit einer einzigen reellen Zahl nicht möglich ist, sondern dass dazu Zahlentupel notwendig sind. Weitere Beispiele dazu sind die Darstellung der Einnahmen und Ausgaben von SchülerInnen, aber auch Punkte in einem ebenen Koordinatensystem verlangen nach Zahlentupeln.

Im Lernpfad werden Vektoren als n-Tupel reeller Zahlen eingeführt. Das bedeutet, dass hier das arithmetische Modell zum Tragen kommt, wobei im Lernpfad nur mit Vektoren im zweidimensionalen Bereich (n=2) gearbeitet wird. Die Zahlenpaare werden als Punkte bzw. Pfeile im zweidimensionalen Koordinatensystem geometrisch interpretiert. Bevor die Rechenoperationen geometrisch und arithmetisch interpretiert werden, müssen Vektoren als Pfeilklassenmodell definiert werden, da sonst die geometrische Interpretation der Vektoraddition und Vektorsubtraktion nicht möglich ist. Gleich lange, parallele und gleich orientierte Pfeile werden als „gleich“ angesehen und in einer Pfeilklasse zusammengefasst. Erst an dieser Stelle kommt im Lernpfad der Begriff „*Vektor*“ vor.

Danach erfolgt die Definition der Vektoraddition und der Vektorsubtraktion, zuerst geometrisch (siehe Abbildung 17) und anschließend arithmetisch (siehe Abbildung 18).

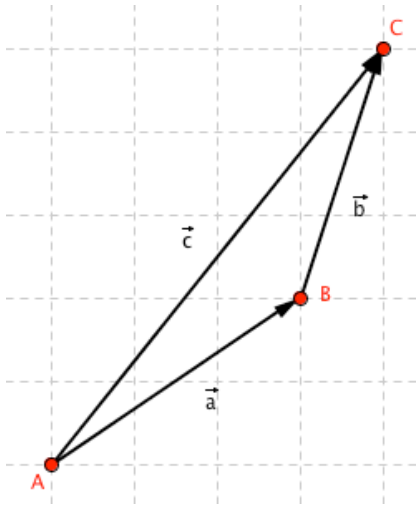



Abbildung 17: geometrische Vektoraddition

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} x_a \\ y_b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_a+x_b \\ y_b+y_b \end{pmatrix}$$

Abbildung 18: arithmetische Vektoraddition

Zusätzlich erfolgt der Hinweis, dass mit Vektoren im Hinblick auf die Addition und Subtraktion wie mit reellen Zahlen gerechnet werden kann. Ebenso werden Rechengesetze der Addition eingeführt und grafisch dargestellt.

Der Hinweis, dass ein Vektor auch als (Ver-)Schiebung verwendet werden kann, wird im Lernpfad nur kurz angesprochen.

Analog zum Rechnen mit reellen Zahlen wird die Summe mehrerer Vektoren, also die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar eingeführt. Die komponentenweise Multiplikation des Vektors mit einer Zahl wird zuerst arithmetisch festgehalten und anschließend anhand einer zentrischen Streckung (siehe Abbildung 19) mit einem Streckungsfaktor t geometrisch ergänzt. Bei der Einführung der Parallelität von Vektoren wurde ebenso vorgegangen.

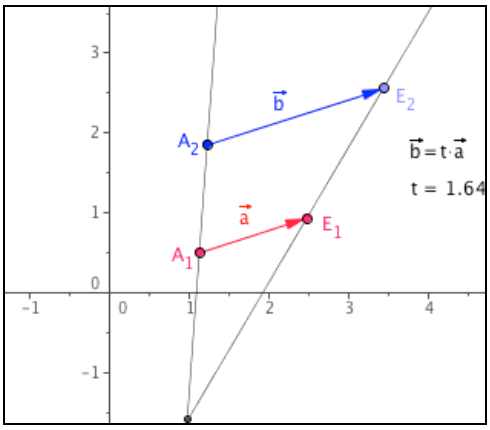



Abbildung 19: zentrische Streckung

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das grundlegende Konzept der Einführung des Vektors im Lernpfad das arithmetische Modell ist und in Verbindung damit über Pfeilklassen, also dem geometrischen Modell, die allgemeine geometrische Veranschaulichung ermöglicht wurde.

Diese Vorgehensweise ist auch in zahlreichen neueren Schulbüchern zu finden. Die geometrische und arithmetische Sichtweise wird eng miteinander verbunden behandelt. Tietze et al. unterscheiden demzufolge drei mögliche Vorgehensweisen (vgl. Tietze et al, 2000, S.164f):

- der Begriff Vektor wird geometrisch eingeführt und arithmetisch interpretiert,
- der Vektor wird arithmetisch eingeführt und geometrisch interpretiert,
- der Begriff wird gleichgewichtig an beide Modellvorstellungen gebunden

## *5.3. Didaktische Betrachtung zur Einführung des Vektorbegriffs*

In diesem Abschnitt werde ich nun die didaktischen Betrachtungen zur Vektorrechnung erläutern und einige mögliche Probleme der SchülerInnen bei der Einführung im Unterricht beschreiben.

In vielen Schulbüchern der vektoriellen Analytischen Geometrie kann man die Einführung des Vektorbegriffs anhand des Pfeilklassenmodells bzw. durch die Verbindung von Pfeilklassen- und Translationsmodell finden. In älteren Büchern wird von gleich gerichteten, gleich orientierten und gleich langen Pfeilen ausgegangen. SchülerInnen haben oft Probleme mit mathematischen Objekten, die wieder aus Objekten zusammengesetzt sind, zu arbeiten (vgl. Tietze et al., 2000, S. 162).

Neuere Schulbücher versuchen diese Probleme zu vermeiden und führen Pfeilklassen als Verschiebungspfeile von Translationen ein. Das Problem, das dabei auftritt ist, dass SchülerInnen oft nicht verstehen, dass eine Abbildung aus unendlich vielen Punktzuordnungen zusammengesetzt wird. Denn unter einer Translation wird meist eine Verschiebung eines starren, beschränkten und konvexen Ebenenstücks verstanden. Zusätzlich muss zwischen Ortsvektoren und freien Vektoren unterschieden werden, was wiederrum zu einem Lernproblem führen kann. Daher versuchen andere Lehrbücher den Vektor als n-Tupel einzuführen und später geometrisch als Punkt, Zeiger, Pfeil oder Translation zu interpretieren. Das Rechnen mit arithmetischen Vektoren (Spaltenvektoren), kann später als Rechnen mit „verallgemeinerten“ Zahlen verstanden werden, wobei SchülerInnen bei der freien Interpretierbarkeit eventuell Schwierigkeiten haben können. Dennoch sprechen mehrere Gründe für die arithmetische Einführung des Vektorbegriffs (vgl. Tietze et al., 2000, S. 162ff):

- Dies ermöglicht den Zugang zur Beschreibung geometrischer Sachverhalte und einer anwendungsorientierten Linearen Algebra. Außerdem lässt sich die arithmetische Einführung der Matrizenrechnung als eine weitere Verallgemeinerung des Rechnens mit Zahlen verstehen. Ferner lässt sich die

Summe zweier arithmetischer Vektoren als Addition zweier Zeiger oder Punkte geometrisch interpretieren, was einen guten Zugang für physikalische Anwendungen ermöglicht. Zuletzt kann man mit einem intuitiven Konzept eines Pfeils, der frei verschiebbar ist, arbeiten anstatt mit dem mathematischen Begriff Pfeilklasse.

- Die einfache Struktur der n-Tupel kann sowohl geometrische Inhalte, als auch Themen einer anwendungsorientierten Linearen Algebra umfassen. Der freie Wechsel zwischen arithmetischem Modell und geometrischen Interpretationen sowie zwischen den Interpretationen untereinander ist ein bedeutendes heuristisches Hilfsmittel.
- Ein Nachteil dieser Vorgehensweise ist die Behandlung von geometrischen Sachverhalten unter Verwendung eines Koordinatensystems, wobei es aber möglich ist, das Koordinatensystem bei der Behandlung dieser elementargeometrischen Sätze in den Hintergrund zu verbannen.

# 6. Lernpfad Vektorrechnung

## *6.1. Die Medienvielfaltsprojekte*

In diesem Kapitel werde ich die Entstehung der Projektreihe „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ sowie die grundlegenden Projektziele, die entstandenen Lernpfade und die Ergebnisse der verschieden Evaluationen beschreiben. Anschließend werde ich den Anlass zur Überarbeitung des Lernpfads Vektorrechnung in der Ebene erörtern und meine Überarbeitung anhand von Screenshots präsentieren.

### 6.1.1. Die Entstehung des Projekts

Im letzten Jahrzehnt fanden im Mathematikunterricht zahlreiche Neuerungen vor allem auf der Ebene der „neuen Medien“ und der Ebene einer „neuen Lernkultur“ statt. Es stehen zum einen technologische und mediale Werkzeuge sowie eine große Anzahl verschiedener Lehr- und Lernmaterialien zu unterschiedlichen Themen der Mathematik zur Verfügung. Zum anderen werden Konzepte schülerInnenzentrierter Lernformen, wie beispielsweise Stationenbetriebe, Lernspiralen und eigenverantwortliches Arbeiten (siehe Abschnitt 2.4.1, Abschnitt 2.4.2 und Abschnitt 2.4.3) im Unterricht vermehrt willkommen geheißen. Wie man diese technologischen, medialen und pädagogischen Ansätze miteinander verbindet, ist nicht ohne weiteres klar (vgl. Bierbaumer et al., 2006, S. 1).

Aufgrund von Untersuchungen und Unterrichtserfahrungen zeigte sich im modernen technologieunterstützten Mathematikunterricht ein Zusammenhang zwischen dieser neuen Lernkultur, der Leistungsbeurteilung und der Nachhaltigkeit des Wissenserwerbs. Der Einsatz der modernen Technologien fordert nicht nur neue fachbezogene Unterrichtsmaterialien, sondern bringt auch die Notwendigkeit des Einsatzes von didaktischen und methodischen Begleitmaterialien mit sich (vgl. Embacher et al., 2006a).

Setzt man diese Medien geschickt ein, können sie dazu beitragen, Handlungstypen wie Modellieren, Operieren und Interpretieren zu stärken und zu unterstützen und neue Zugänge zu mathematischen Inhalten zu finden. Außerdem können überfachliche Kompetenzen wie Persönlichkeitskompetenz und Sozialkompetenz gefördert und gesteigert werden (vgl. Embacher & Oberhuemer, 2009b).

Zum eigentlichen Grundstein des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ zählen zahlreiche Projekte aus den Jahren 1992 bis 2005 der Initiative *„Austrian Center for Didactics of Computer Algebra“* (ACDCA). Diese Organisation hat versucht durch mehrere Bundesprojekte eine Lösung der Schnittstellenproblematik zwischen den Erkenntnissen

der Wissenschaft, den Möglichkeiten der Software und den Erfahrungen im Schulalltag beim Einsatz von elektronischen Lernmedien im Mathematikunterricht zu finden (vgl. Klinger & Wegscheider, 2005, S .4).

In den Projekten (CAS I bis V) von ACDCA gab es bereits Kontakte zu den Initiativen wie „*mathe online*“ und später zu „*GeoGebra*“. Kooperiert wurde in Form von Referententätigkeiten bei Seminaren und gemeinsamen Diskussionen bei Workshops und Tagungen. Im Jänner 2004 wurden erste Überlegungen zur Umsetzung eines gemeinsamen Projekts zwischen ACDCA, mathe online und GeoGebra gemacht (vgl. Klinger & Wegscheider, 2006, S. 1).

Das Projektteam widmete sich von 2004 bis 2006 vor allem den Fragestellungen, wo die Stärken der verschiedenen Werkzeuge, Medien und Materialien liegen und wie ein optimiertes Zusammenspiel dieser Werkzeuge in einem zeitgemäßen Mathematikunterricht aussieht.

Die drei Initiativen ACDCA, GeoGebra und mathe online, haben aufbauend auf den verschiedenen Zugängen und Erfahrungen computerunterstützte Unterrichtssequenzen, sogenannte Lernpfade (siehe Unterabschnitt 6.1.3) für Lehrende und Lernende entwickelt. Neue Lernformen wie der schülerzentrierte Unterricht und das Arbeiten mit elektronischen Medien haben im Laufe der Entwicklungsarbeiten viel an Bedeutung gewonnen (vgl. Embacher & Oberhuemer, 2009b).

In den Jahren 2008 bis 2009 startete das Nachfolgeprojekt „Medienvielfalt 2 im Mathematikunterricht“. Bei diesem Projekt widmete man sich dem Thema „Funktionale Abhängigkeiten“ und erarbeitete einen Längsschnitt vom Ende der Volksschule bis zur weiterführenden Ausbildung nach der Matura.

Zusätzlich zur Kooperation zwischen den drei Initiativen ACDCA, mathe online und GeoGebra wurde unter anderem bei diesem Projekt mit dem Regionalen Fachdidaktikzentrum Mathematik und Informatik an der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich, der Universität Würzburg sowie mit Mathematik-Digital in Bayern kooperiert.

Alle 13 Lernpfade sowie Berichte zu diesem Projekt sind auf http://rfdz.ph-noe.ac.at frei verfügbar. Im Zuge dieses Projekts wurde zu jedem Lernpfad ein Wissenstest für SchülerInnen zur Verfügung gestellt. Auf das Projekt „Medienvielfalt 2 im Mathematikunterricht“ werde ich im Zuge dieser Diplomarbeit nicht weiter eingehen, da dies den Rahmen der Diplomarbeit sprengen würde und ich mich aufgrund der

Überarbeitung des Lernpfads „Vektorrechnung in der Ebene“ auf das erste und dritte Medienvielfaltsprojekt spezialisieren werde.

Das nachfolgende dritte Projekt trägt den Titel „Medienvielfalt und Genderaspekte im Mathematikunterricht: Let’s Do it!“. Das Projekt werde ich im Abschnitt 6.2 beschreiben und den Zusammenhang mit meiner Diplomarbeit erläutern.

Bevor ich auf die Ziele des Medienvielfaltsprojekts eingehe, werde ich kurz die zwei Initiativen ACDCA und mathe online, welche ich bereits in diesem Kapitel erwähnt habe, vorstellen. Die Initiative GeoGebra beziehungsweise das Programm an sich, werde ich im Unterabschnitt 6.4.1 „Verwendetes Programm: GeoGebra“ näher erläutern.

#### *6.1.1.1. ACDCA*

Die Initiative ACDCA wurde im Jahr 1992 von Helmut Heugl, Walter Wegscheider, und Walter Klinger gegründet. Das Ziel war, wie bereits erwähnt, an der Schnittstelle zwischen Wissenschaft, Softwareproduktion und Unterrichtspraxis im Bereich der CAS mitzuwirken. Außerdem stand die Vertretung der österreichischen Forschung und Erfahrung auf diesem Gebiet im Vordergrund.

Im Zeitraum von 1992 bis 2005 initiierte ACDCA zahlreiche Forschungsprojekte (CAS I bis V) sowie Unterrichtsexperimente und veranstaltete nationale und internationale Workshops und Konferenzen, wie z.B. die Konferenz TIME-2008 (Technology and its Integration into Mathematics Education) in Südafrika.

Folgende Punkte setzte sich der Verein zusätzlich noch als Ziel (vgl. Heugl et al., 1992):

- Entwicklung von Unterrichtsmaterialien und Materialien zur Evaluation von Experimenten,
- internationale Verbreitung von Untersuchungsergebnissen,
- Mitwirkung bei Softwareproduktionen und -adaptionen,
- Entwurf von Vorschlägen zur Veränderung des Curriculums im Bereich der Ziele, Inhalte und der didaktischen Grundsätze,
- Unterstützung bei Diplomarbeiten und Dissertationen.

Durch die jahrelange Vorarbeit sowie durch bundesweite Projekte konnte ACDCA einen besonderen Beitrag zum Medienvielfaltsprojekt leisten.

#### *6.1.1.2. mathe online*

Mathe online, entwickelt von Franz Embacher und Petra Oberhuemer im Jahre 1998, versucht moderne, didaktische Konzepte durch multimediale und interaktive Techniken zu realisieren und damit zur Entwicklung von zeitgemäßen Standards für Schule, Universität und Erwachsenenbildung beizutragen. Die Institution mathe online ist ein webbasierter Content Pool und bietet Lernhilfen zu mathematischen Themen für den Einsatz im Unterricht aber auch für das selbstständige Lernen an. Das Erlernen von Mathematik soll mit dem Einsatz von interaktiven Techniken und unterschiedlichsten Methoden erleichtert werden (vgl. Embacher & Oberhuemer, 2009c).

Mathe online ist unter der Webadresse http://www.mathe-online.at frei zugänglich.

### 6.1.2. Zielsetzung des Projekts

Das grundlegende Ziel des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ ist die Kluft zwischen „neuen Medien“ und „neuer Lernkultur“ zu verringern. Die zentralen Ziele des gemeinsamen Projekts waren die Entwicklung von Konzepten für eine ideale Medien- und Methoden-Kombination unter Integration der zur Verfügung stehenden Technologien. Im Summary des Rechenschaftsbericht 2006 (vgl. Bierbaumer, et al., 2006, S. 1f) wurde unter anderem dieses grundlegende Ziel zusätzlich zu folgenden Zielen konkret formuliert:

- Entwicklung innovativer Einsatzszenarien für web-basierte Technologien bei Verfügbarkeit des Werkzeugs CAS.
- Gemeinsame Entwicklung von exemplarischen Lernpfaden unter Nutzung von CAS und web-basierten Technologien ggf. im Zusammenspiel mit LMS/ CMS.
- Aufbau von Kommunikations- und Kooperationsabläufen zwischen EntwicklerInnen und Lehrenden in der Unterrichtspraxis.
- Einsatz der entwickelten Produkte in der LehrerInnenfortbildung.
- Untersuchung der Auswirkungen des Einsatzes neuer Lehr-/Lernmedien auf das Lehren und Lernen (Konsequenzen für die didaktische Aufbereitung des Unterrichtsstoffes, den Lernerfolg, die Möglichkeit zur individuellen Lernprozessgestaltung).

Die erzeugten Materialien sollen LehrerInnen angesichts der Vielfalt der bestehenden Angebote als Hilfestellung dienen und Impulse für kommende Standard- und Lehrplanentwicklungen geben können.

Diese Ziele waren die Grund und Ausgangslage der dabei entstandenen Lernpfade und Begleitmaterialien für Lehrende, auf welche ich im nächsten Unterabschnitt 6.1.3 eingehen möchte.

### 6.1.3. Projektdurchführung

Insgesamt wurden 14 Lernpfade zu ausgewählten Themen ab der 2. Klasse Sekundarstufe I (SK I) entwickelt, welche einen sinnvollen Einsatz von neuen Medien im Mathematikunterricht darstellen sollen. Sie sind für den Einsatz in AHS, BHS (Berufsbildende höhere Schulen) und APS (Allgemeine Pflichtschulen) geeignet und sind unter www.austromath.at/medienvielfalt/ frei verfügbar. Im Jahr 2005 erfolgte die Erprobung der entwickelten Lehr- und Lernmaterialien durch 74 LehrerInnen und 1538 SchülerInnen aus 88 verschiedenen österreichischen Klassen. Davon waren 36 Klassen aus der SK I und 52 aus der SK II (AHS oder BHS) (vgl. Stepancik, 2006, S. 1).

In der folgenden Tabelle 3 sind die entstandenen Lernpfade, deren Autoren sowie die Anzahl der SchülerInnen, welche die Lernpfade evaluiert haben, zusammengefasst. Sämtliche Information über die Lernpfade sowie die Autoren habe ich von der Webseite www.austromath.at/medienvielfalt entnommen. Die Details der Evaluationsergebnisse bezüglich der Anzahl der SchülerInnen, welche an der Evaluation der Lernpfade teilgenommen haben, entstammen dem Rechenschaftsbericht über „Allgemeine Evaluationsergebnisse und methodisch-didaktische Schlussfolgerungen“ von Evelyn Stepancik (2006, S. 1).

| **Thema/ Titel der Lernpfade** | **Autoren** | **Anzahl Schüler-Innen** |
|---|---|---|
| **Geometrie (2. Klasse)** | | |
| • Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe | Anita Dorfmayr, Walter Klinger | 198 |
| • Kongruenz – vermuten, erklären, begründen | Anita Dorfmayr, Walter Klinger | 15 |
| • Dreiecke – Merkwürdige Punkte | Edeltraud Schwaiger, Hildegard Urban-Woldron | 63 |
| **Satz von Pythagoras (3./4. Klasse)** | | |
| • Pythagoras (3. Klasse) | Evelyn Stepancik | 242 |
| • Pythagoras im Raum (4.Klasse) | Anita Dorfmayr | 66 |
| **Zylinder – Kegel – Kugel (4. Klasse)** | | |
| • Zylinder – Kegel – Kugel | Evelyn Stepancik | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| **Beschreibende Statistik (4. Klasse)** | | |
| • Beschreibende Statistik | Gabriele Bleier, Franz Embacher, Evelyn Stepancik | 199 |
| **Funktionen (4. Klasse)** | | |
| • Funktionen - Einstieg | Irma Bierbaumer, Franz Embacher, Helmut Heugl | 281 |
| **Vektorrechnung (5./6. Klasse)** | | |
| • Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1 | Andreas Lindner, Markus Hohenwarter, Thomas Himmelbauer, Anita Dorfmayr | 104 |
| • Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2 | Andreas Lindner, Markus Hohenwarter, Thomas Himmelbauer, Anita Dorfmayr | 56 |
| **Wahrscheinlichkeitsrechnung (6./7. Klasse)** | | |
| • Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung | Gabriele Jauck, Gabriele Bleier, Markus Hohenwarter | 59 |
| **Differentialrechnung (7. Klasse)** | | |
| • Einführung in die Differentialrechnung | Markus Hohenwarter, Gabriele Jauck | 201 |
| **Integralrechnung (8. Klasse)** | | |
| • Einführung in die Integralrechnung | Markus Hohenwarter, Gabriele Jauck, Andreas Lindner | 25 |
| **Kryptographie (WPG)** | | |
| • RSA-Algorithmus: Asymmetrische Verschlüsselung | Walter Wegscheider, Petra Oberhuemer, Franz Embacher | 23 |

Tabelle 3: Die entstandenen Lernpfade

Für die Evaluierung wurde ein SchülerInnen- und LehrerInnen -Fragebogen mit je 30 Fragen entwickelt. Das Projektteam entschied sich für eine Online-Befragung, da man mit einer zahlreichen Beteiligung rechnete und die Durchführung der Befragung, sowie Auswertung der Antworten einer Umfrage dieser Größe in Papierform unzumutbar gewesen wäre. Als Plattform für die Umfrage wurde die Open Source Lernplattform ILIAS der Universität Köln verwendet. ILIAS bietet ein leistungsfähiges Test- und Umfragetool an, mit welchem man einen Fragenpool anlegen und gängige Fragetypen wie Single Choice-/Multiple Choice-Fragen, Fragen mit Ordinalskala, Fragen mit metrischer Skala sowie offene Textfragen verwenden kann. Die Einzelfragen können beliebig zu einer oder mehreren Umfragen kombiniert werden. Außerdem kann man innerhalb des Fragebogens frei navigieren was bedeutet, dass gewisse Fragen nur erscheinen, wenn eine Frage zuvor mit einem JA/NEIN beantwortet wurde. Das Team des Medienvielfaltsprojekts legte

eine geschlossene ILIAS-Lerngruppe für alle SchülerInnen und LehrerInnen an. Alle BenutzerInnen erhielten einen Account, mit dem man sicherstellen konnte, dass alle Daten der TeilnehmerInnen von allen anderen ILIAS-BenutzerInnen getrennt bleiben. Die teilnehmenden LehrerInnen erhielten eine Kurzanleitung zur Verwendung des Online-Fragebogens.

Nach der Umfrage wurden die Daten im Excel-Format an Evelyn Stepancik weitergeleitet, die die Daten weiterbearbeitete und auswerte (vgl. Klinger & Wegscheider, 2006, S. 23ff).

Neben der Evaluation durch TestlehrerInnen und SchülerInnen wurde zusätzlich eine innere Evaluation, also innerhalb des Projektteams, durchgeführt. Diese Evaluation wurde als ein wesentliches Ergebnis des Projekts angesehen. Die internen Evaluationsbögen lieferten außerdem eine geeignete Vorerhebung zur Lernpfadkritik und leisteten zusätzlich einen Beitrag zur systematischeren Betrachtung von Lernpfaden in Zukunft (vgl. Klinger & Wegscheider, 2006, S.37).

Im anschließenden Abschnitt 6.2 werde ich den Zusammenhang zwischen den Medienvielfaltsprojekten und meiner Diplomarbeit erläutern.

## *6.2. Medienvielfalt und Genderaspekte*

Das Projekt „*Medienvielfalt und Genderaspekte im Mathematikunterricht: Let's Do IT!*“ gilt als Nachfolgeprojekt der Projekte „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ sowie „Medienvielfalt 2 im Mathematikunterricht“.

Die folgenden Informationen entstammen aus einem Projekttreffen im März 2010 und sind nur innerhalb des Projektteams veröffentlich worden.

Bei diesem aktuellen Projekt geht es grundsätzlich um die auf den Evaluationsergebnissen basierende Überarbeitung der Materialien, genauer gesagt, um die Überarbeitung der Lernpfade, die aus den beiden Projekten der Jahre 2004 bis 2006 sowie 2008 bis 2009 hervorgegangen sind. Außerdem wurden folgende Ziele gesetzt:

- *Stärkung des Genderaspekts bei den Begleitmaterialien für LehrerInnen sowie den Lernmaterialien selbst,*
- *Erarbeitung weiterer methodisch-didaktischer Einsatzszenarien sowie der Ausarbeitung verschiedener Formen der Unterrichtsorganisation beim Einsatz von Lernpfaden,*

- Entwicklung je eines weiteren Lernpfads für die SEK I und SEK II zum Längsschnitt „Funktionale Abhängigkeiten“,
- Dissemination der Materialien in allen Bundesländern,
- Evaluation der neuen und verbesserten Materialien,
- Durchführung von Wissenstests zur Untersuchung von Nachhaltigkeit und der Sicherung von Grundkompetenzen.

Im Zuge meiner Diplomarbeit übernahm ich die Überarbeitung des Lernpfads „Vektorrechnung in der Ebene Teil 1“, dessen ursprüngliche Autoren Mag. Andreas Lindner, Prof. Markus Hohenwarter, Mag. Thomas Himmelbauer und Mag. Anita Dorfmayr sind. Zum Thema Vektoren gibt es noch einen weiteren Lernpfad, den Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene Teil 2. Man entschied sich bei der Erstellung des Lernpfads den Lerninhalt auf zwei getrennte Lernpfade aufzuteilen, weil der Stoff für einen Lernpfad zu umfangreich war. Meine Aufgabe war es, nicht nur den Lernpfad selbst, sondern auch die Begleitmaterialien für LehrerInnen unter dem Genderaspekt zu überarbeiten, weitere methodisch-didaktische Einsatzmöglichkeiten des Lernpfads zu gestalten sowie einen Wissenstest für SchülerInnen zu erstellen.

Die Überarbeitung wurde nicht nur durch Rückmeldungen aus der inneren und externen Evaluation angeregt. Ich hatte darüber hinaus auch die Möglichkeit an einer LehrerInnenfortbildung am 2. Dezember 2010 an der Johannes Kepler Universität, welche von Herrn Mag. Dr. Markus Hohenwarter geleitet wurde, teilzunehmen. Im Zuge dieser LehrerInnenfortbildung konnte ich eine LehrerInnenbefragung durchführen. Für mich waren die Ergebnisse der LehrerInnenfortbildung sehr aufschlussreich, da ich dadurch auf Details hingewiesen wurde, die mir trotz einer intensiven Auseinandersetzung mit dem Lernpfad nicht auffielen und teilweise nur von erfahrenen LehrerInnen bemerkt werden konnten.

Für diese Fortbildung wurde ein Fragebogen (siehe Anhang 10.1) mit acht Fragen für die teilnehmenden LehrerInnen vorbereitet, welche zur Aufgabe hatten, den Lernpfad „Vektorrechnung in der Ebene“ durchzuarbeiten, kritisch zu hinterfragen und parallel den Fragebogen zu beantworten. Dieser Fragebogen entstand in Zusammenarbeit mit meiner Studienkollegin Frau Christina Gassner, welche im Zuge ihrer Diplomarbeit den Lernpfad „Einführung in die Integralrechnung“ überarbeitete und somit ebenfalls am Projekt „Medienvielfalt und Genderaspekte im Mathematikunterricht: Let’s do IT!“ teilnimmt.

Bevor ich auf die Resultate der inneren und äußeren Evaluation sowie die der LehrerInnen aus der Fortbildung eingehe, werde ich das Konzept des Lernpfads Vektorrechnung in der Ebene (siehe Abschnitt 6.3) beschreiben und Technisches zum Lernpfad (siehe Abschnitt 6.4) hinzufügen.

## *6.3. Das Konzept des Lernpfads zur Vektorrechnung*

Grundsätzlich wurde bei der Konzeption des Lernpfads das erforschende, explorative Arbeiten der SchülerInnen als Einstieg in jedes Kapitel in den Vordergrund gestellt und durch eine anschließende Phase der Exaktifizierung ergänzt.

Das erforschende Lernen der SchülerInnen wird mit diesem Lernpfad gefördert. Die neu gewonnenen Erkenntnisse durch den Lernpfad sollen mit anschließenden händischen Übungen vertieft und gefestigt werden. Durch den gesamten Lernpfad hindurch besteht die Aufgabenstellung in einer Verknüpfung von Arbeiten am Computer sowie mit Papier und Bleistift. Lösungen der Übungen sind entweder aus der Konstruktion ersichtlich oder werden explizit durch Lösungslinks als solche angeführt.

Prinzipiell ist der Lernpfad zum selbstständigen Erarbeiten der Inhalte gedacht und geeignet. Es wurde besonders Wert auf die Verbindung von traditionellen Medien (Tafel, Buch, Heft) mit interaktiven Lernhilfen gelegt. Der Lernpfad kann überdies auch als Wiederholung oder Zusammenfassung von bereits Erlerntem verwendet werden.

Jeder Lernpfad beinhaltet ausführliche methodisch-didaktische Erläuterungen für LehrerInnen, welche Vorschläge für konkrete Unterrichtsabläufe (Wahl der Lern- und Sozialform) darstellen sollen (vgl. Lindner et al., 2006, S. 1ff).

Jedem/r LehrerIn ist es selbst überlassen, auf welche Art und Weise der Lernpfad im Unterricht eingesetzt wird, ob nur Teile daraus verwendet werden oder der Lernpfad anhand der vorgeschlagenen Methoden unterrichtet wird. Diese Methoden wie z.B. Lernspirale und Stationenbetrieb (siehe Abschnitt 2.4.1 und Abschnitt 2.4.2) findet man in den didaktischen Begleitmaterialien. Für jeden einzelnen Lernpfad wurden ein oder mehrere passende Unterrichtsvorschläge gewählt und ausgearbeitet. Welche Methoden für den Einsatz im Unterricht beim Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene vorgeschlagen wurden, werden im Kapitel 7 „Didaktische Begleitmaterialien“ näher beschrieben.

## 6.4. Technisches zum Lernpfad

### 6.4.1. Verwendetes Programm: GeoGebra

Das Thema Vektorrechnung in der Ebene bietet grundsätzlich zahlreiche Möglichkeiten zum Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware. In diesem Lernpfad wurde sehr oft das Programm GeoGebra eingesetzt.

Die dynamische Mathematiksoftware GeoGebra entstand 2001 in Zuge der Diplomarbeit, sowie der späteren Dissertation im Bereich Didaktik der Mathematik von Dipl.-Ing. Mag. Dr. Markus Hohenwarter an der Universität Salzburg. GeoGebra ist eine frei verfügbare Software und wird seit dem Schuljahr 2003/2004 nicht nur in österreichischen Schulen verwendet (vgl. Embacher et al., 2006b, S. 4).

GeoGebra wird heute in 55 Sprachen und weltweit in über 190 Ländern von Millionen von Lernenden und Lehrenden eingesetzt. Das Programm ist inzwischen ein internationales Produkt da sich Entwickler aus aller Welt an der ständigen Weiterentwicklung beteiligen. GeoGebra ist für alle Betriebssysteme verfügbar und liegt bereits in der Version 3.2 vor, welche von der Webseite www.geogebra.at stets zum Download vorhanden ist. Die Software, welche bereits mehrere internationale Preise, wie z.B. den Europäischen-Bildungssoftware-Preis 2002, gewann, verbindet Geometrie, Algebra, Tabellen, Zeichnungen, Statistik und Analysis in einem einfach zu bedienenden Softwarepaket (vgl. Hohenwarter, 2007).

Aus meiner eigenen Erfahrung kann ich sagen, dass die Geometriesoftware mit einer sehr einfach zu bedienende Benutzeroberfläche ausgestattet ist und es dadurch interessant und einfach ist, interaktive Unterrichtsmaterialien zu gestalten.

Nach der Evaluation der Lernpfade, deren Ergebnis ich anschließend anführen werde, wurde die einfache Handhabung von GeoGebra, von SchülerInnen sowie auch LehrerInnen bestätigt, was das folgende Zitat aus dem Rechenschaftsbericht (Stepancik, 2006, S.18) nochmals bestätigt:

*„Es hat SchülerInnen großen Spaß gemacht, mit GeoGebra zu arbeiten und der Unterricht wurde abwechslungsreicher“.*

Man kann mit GeoGebra einfach dynamische Figuren auf Webseiten exportieren und somit eigene interaktive Unterrichtsmaterialien, sogenannte dynamische Arbeitsblätter, erstellen. Ein solches dynamisches Arbeitsblatt kann beliebig gestaltet werden, meist besteht ein solches aus einer Überschrift, einem interaktiven Applet sowie Aufgaben und

Anweisungen für SchülerInnen. Im anschließenden Lernpfad „Vektorrechnung in der Ebene“ werden hauptsächlich derartige interaktive Applets verwendet:

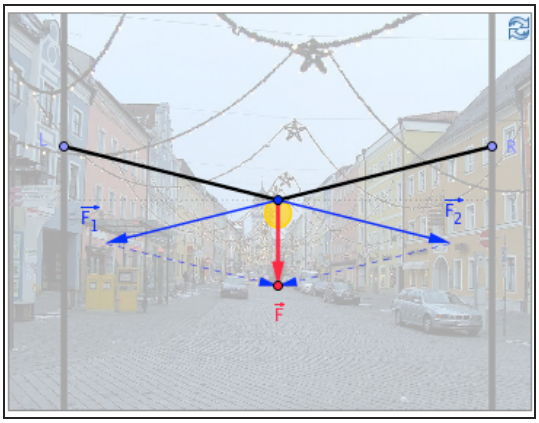



Abbildung 20: Applet Beleuchtung

Bei diesem dynamischen Applet können SchülerInnen die Lage des linken und rechten Aufhängepunkts der Straßenbeleuchtung verändern und somit die Veränderung der wirkenden Kräfte beobachten sowie den Sachverhalt durch ein exploratives und erforschendes Arbeiten herausfinden, wie aus Abbildung 20 ersichtlich ist.

### 6.4.2. Voraussetzungen der SchülerInnen

Technisch gesehen sollten SchülerInnen Grundfertigkeiten im Umgang mit GeoGebra besitzen und auf einer Webseite navigieren können. Dateien zu öffnen, diese abzuspeichern sowie zu schließen sollte keine größeren Probleme bereiten. Da wie bereits in vorhergehenden Abschnitt erwähnt, GeoGebra sehr einfach zu bedienen ist und im Lernpfad lediglich einzelne interaktive Applets vorkommen, bei welchen SchülerInnen beispielsweise Punkte verschieben müssen, dürfte der Umgang mit GeoGebra nach einer nur sehr kurzen Einführungsphase kein Problem sein.

Ein sehr einfaches Beispiel aus dem Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene, stellt Abbildung 21 dar. SchülerInnen sollen hier lediglich die Punkte A, E, R und S verschieben und dabei die Koordinaten der beiden Pfeile beobachten und bestimmte Anweisungen zum Applet ausführen.

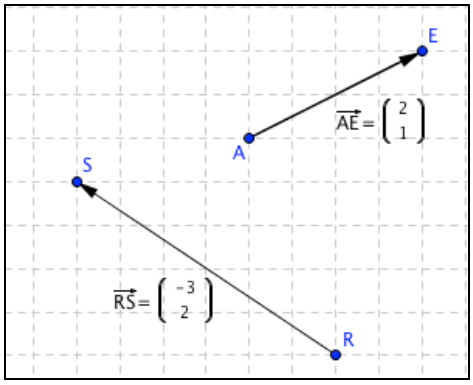



Abbildung 21: Punkte verschieben

Aus fachlicher Sicht sollten SchülerInnen das Ablesen von Koordinaten, Rechnen mit Punkten, die Grundrechnungsarten sowie die Berechnungsformel für den Umfang von Vielecken (Dreieck, Parallelogramm) beherrschen.

Außerdem sollen SchülerInnen aus methodischer Sicht gesehen, Informationen selbstständig schriftlich festhalten sowie mit einem Partner oder in einer Gruppe arbeiten und anschließend erarbeitete Ergebnisse präsentieren können.

Zusammenfassend sollen SchülerInnen eine gewisse Fach-, Methoden-, Sozial- und Persönlichkeitskompetenz mitbringen, die durch das Arbeiten mit dem Lernpfad wie bereits erwähnt noch mehr angestrebt und gefördert wird (siehe Abschnitt 4.1).

## *6.5. Rückmeldungen aus der Evaluation des Lernpfads*

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Evaluationen im Zuge des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ angeführt. Dabei wurden speziell jene Ergebnisse und Rückmeldungen herausgegriffen, welche den Lernpfad „Vektorrechnung in der Ebene“ betreffen.

### 6.5.1. Ergebnisse der internen Evaluation

Im Folgenden werde ich die Ergebnisse der internen Evaluation von Projektmitgliedern in positive und negative Rückmeldungen gliedern. Grundlage für meine Überarbeitung waren folglich nur die negativen Rückmeldungen, weil dadurch Verbesserungspotenzial erkannt wurde. Der Vollständigkeit halber, werde ich zusätzlich auch einige positive Rückmeldungen anführen. Die Ergebnisse sammelte ich aus dem Rechenschaftsbericht „Lernpfade“ des Projekts (vgl. Lindner et al., 2006, S. 4ff).

*positive Rückmeldungen:*

- Der Lernpfad ist ein Instrument für die Erarbeitung bzw. Wiederholung neuer Inhalte und der Anwendung von Vektoren bei technischen und physikalischen Fragestellungen.
- Die Applets sowie die damit verbundenen offenen Fragestellungen sind gut durchdacht und detailliert gestaltet.
- Die mathematischen Inhalte sind korrekt formuliert.

*Anregungen für Verbesserungen:*

- Die Begriffe „Pfeil“ und „Vektor“ wurden nicht durchgängig scharf voneinander abgegrenzt, was aber die Absicht des Autors war, da dieser den Umfang des Lernpfades nicht sprengen wollte.
- Lernziele sind für LehrerInnen im didaktischen Kommentar nachzulesen, für SchülerInnen sind diese nicht explizit angeführt, ergeben sich aber aus den Fragestellungen.
- Manche Handlungsanweisungen zu den Applets und dynamischen Elementen sind teilweise zu wenig genau oder nicht ausführlich genug formuliert, deshalb sind zusätzliche Anweisungen durch LehrerInnen in mündlicher oder schriftlicher Form erforderlich.
- Im Lernpfad gibt es zu wenig Beispiele, die zur Vertiefung und Festigung des Wissens beitragen könnten.

Weitere Anregungen sowie Ideen für die Überarbeitung des Lernpfades Vektorrechnung in der Ebene entstanden im Zuge eines Projekttreffens in Stockerau vom 17. bis 19. September 2010. Die folgenden Punkte gehören meiner Meinung nach ebenso zu den Ergebnissen der internen Evaluation, da diese Punkte ebenfalls innerhalb des Projektteams entstanden sind. Die folgenden aufgelisteten Punkte, welche sich teilweise mit den Zielen des aktuellen Medienvielfaltsprojekts decken, wurden in einem Word-Dokument gesammelt, welches mir Herr Prof. Hohenwarter zur Verfügung stellte:

- Die didaktischen Begleitmaterialien sollen unter Berücksichtigung von Genderaspekten und technischen Anleitungen überarbeitet werden.
- Ziele, die mit dem Lernpfad – unter Berücksichtigung von Kompetenzen und Standards – erreicht werden, sollen genauer beschrieben werden und sowohl für LehrerInnen als auch für SchülerInnen zugänglich sein.

- Es sollen mindestens zwei Unterrichtsorganisationsanregungen für LehrerInnen angeboten werden.
- Es soll darauf geachtet werden, dass an bestimmten Stellen mindestens zwei unterschiedliche gendersensible Beispiele als Wahlmöglichkeit angeboten werden.
- Es sollen ungefähr drei lernprozessorientierte Abreitsaufträge zur Ergebnissicherung angeboten werden.
- Der Lernpfad soll zielgruppengerecht sein, dazu soll im didaktischen Begleitmaterial eine Information oder Beschreibung erscheinen.
- SchülerInnen sollen im Lernpfad die Möglichkeit haben Feedback abzugeben.

### 6.5.2. Ergebnisse der äußeren Evaluation

Im Großen und Ganzen ergaben sich im Zuge der äußeren Evaluation der SchülerInnen keine nennenswerten Besonderheiten. Ich werde deshalb nur kurz zwei Zitate von SchülerInnen anführen und einige wenige Auswertungen der Ergebnisse aus dem Rechenschaftsbericht „Lernpfad Vektorrechnung“ (Lindner, et al., 2006, S. 8ff) anführen:

*„Die vielen Erklärungen und Aufgaben haben mir geholfen dieses Beispiel zu verstehen, ebenso, dass man alles verschieben und sich danach die Veränderung ansehen kann“.*

*„Die Abbildungen waren sehr leicht zu verstehen; das Layout war sehr bunt gestaltet. Die Merksätze waren einfach formuliert – Schritt für Schritt zu arbeiten war sehr toll“.*

Bei der Zufriedenheit mit dem Lernpfad fällt auf, dass die Mehrheit der SchülerInnen nicht völlig zufrieden war, aber dennoch positiv dafür abstimmte. Völlig positiv beurteilten die SchülerInnen die Frage, dass es bei der Arbeit mit dem Lernpfad selbstverständlich war, MitschülerInnen zu helfen und selbst, wenn nötig, Hilfe zu bekommen.

Außerdem wurden die interaktiven Applets zu den Anwendungsaufgaben besonders positiv erwähnt. Die Möglichkeit, selbst Veränderungen an den Applets vornehmen zu können, schätzten die SchülerInnen sehr, da ihrer Meinung nach dadurch das mathematische Verständnis unterstützt wurde.

### 6.5.3. Rückmeldungen aus der LehrerInnenfortbildung

Nach der LehrerInnenfortbildung sammelte ich alle Rückmeldungen zu den Fragen aus dem Fragebogen (siehe Anhang 10.1) und sortierte die Kommentare dem Lernpfad entsprechend. Das bedeutet, dass ich zu jeder einzelnen Seite aus dem Lernpfad die Kommentare bzw. Rückmeldungen der LehrerInnen zusammenfasste um gut strukturiert mit der Überarbeitung des Lernpfads beginnen zu können. Ich werde nun die Kommentare teilweise in Form von Zitaten oder in Form von von mir ausformulierten Sätzen dokumentieren. Damit man sich unter den Kommentaren und Rückmeldungen der LehrerInnen auch etwas vorstellen kann, werde ich den Lernpfad anhand von Screenshots präsentieren und Erläuterungen vornehmen.

Ich werde im folgenden nicht nur zu den Rückmeldungen der LehrerInnenfortbildung Stellung nehmen, sondern zusätzlich auch die Rückmeldungen der inneren und äußeren Evaluation miteinbeziehen.

## *6.6. Überarbeitung des Lernpfads zur Vektorrechnung*

### 6.6.1. Home- und Startseite

Im Zuge des Projekttreffens in Amstetten vom 18. bis 20. März 2011 wurde vereinbart, dass die gesamten Lernpfade eine einheitliche „Home“ Seite beinhalten sollen. So wurde ein einheitliches Layout entwickelt, das wie in Abbildung 22 dargestellt aussieht:

Abbildung 22: Home-Seite

Die Startseite sollte ursprünglich eine kurze Information für SchülerInnen zum Lernpfad geben. Aus meiner Sicht war jedoch die Information etwas zu knapp. Es gab zwar einen kurzen Überblick, aber dennoch bin ich der Meinung, dass die Startseite eines Lernpfads ansprechender gestaltet sein und mehr Informationen für SchülerInnen beinhalten muss (siehe Abbildung 23).

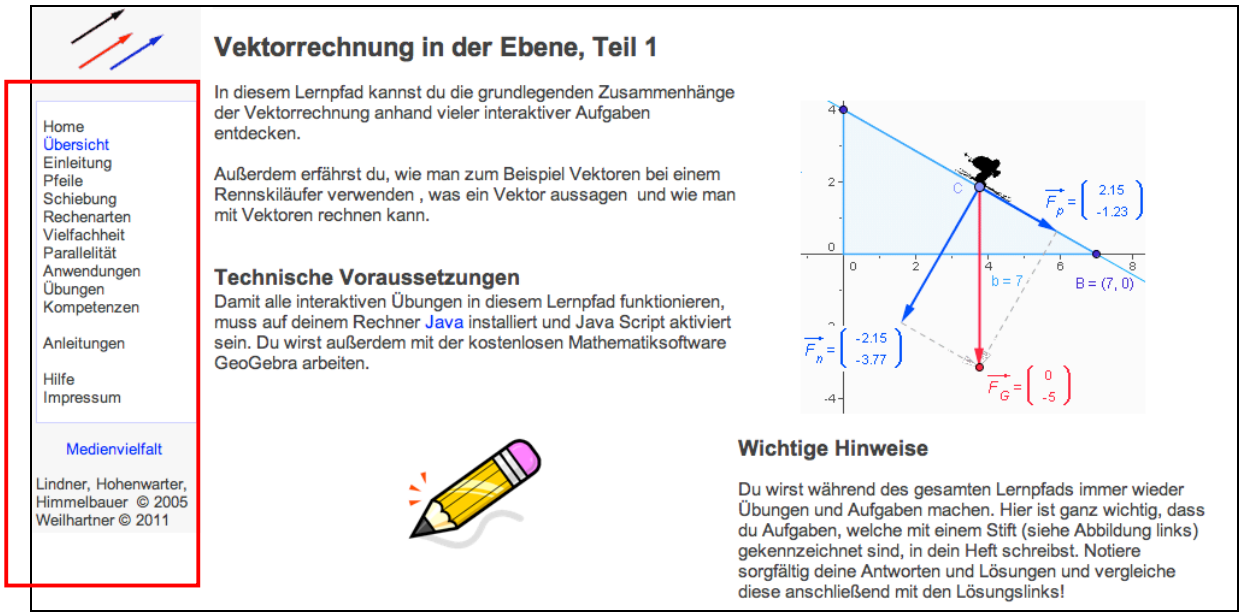



Abbildung 23: Startseite nach der Überarbeitung

Durch zwei kurze einleitende Sätze habe ich versucht, SchülerInnen auf den Inhalt und auf das Arbeiten mit dem Lernpfad neugierig zu machen. Außerdem sollten den SchülerInnen die Bedeutung des Stiftes erklärt werden. Dieser Stift wird durch den ganzen Lernpfad hindurch SchülerInnen darauf hinweisen, Lösungen einer Aufgabe sowie Überlegungen und Vermutungen in ihre Projektmappe zu schreiben. Sobald ein Stift neben einer Aufgabe angebracht ist, wissen SchülerInnen, dass Notizen in die Mappe gemacht werden müssen.

Mit Hilfe der Navigationsleiste (siehe roter Rahmen in Abbildung 23) kann zwischen den einzelnen Seiten navigiert werden. Der Zugriff auf die Startseite oder eine vorherige Seite, wie beispielsweise eine Definition, ist jederzeit möglich. Die Navigationsleiste gibt auch einen kurzen Überblick über die einzelnen Kapitel im Lernpfad, welche stets angezeigt werden. Diese einzelnen Kapitel beinhalten meist mehrere Unterkapitel, welche erst nach Anklicken des Überkapitels angezeigt werden und meistens aus einem Definitions- und Übungsteil bestehen.

### 6.6.2. Einleitung

Die Einleitung in die Thematik Vektorrechnung in der Ebene erfolgte ursprünglich anhand eines Beispiels eines Flugzeugs (siehe Abbildung 24) mit einem interaktiven Applet, welches die SchülerInnen auf die nachfolgende Vektorrechnung vorbereiten soll. Man konnte das Flugzeug im interaktiven Applet durch den Schieberegler t (Zeit) verschieben und die Geschwindigkeit des Flugzeuges mit dem Schieberegler v ändern. Unter anderem konnte man das Flugzeug auch rückwärts fliegen lassen.

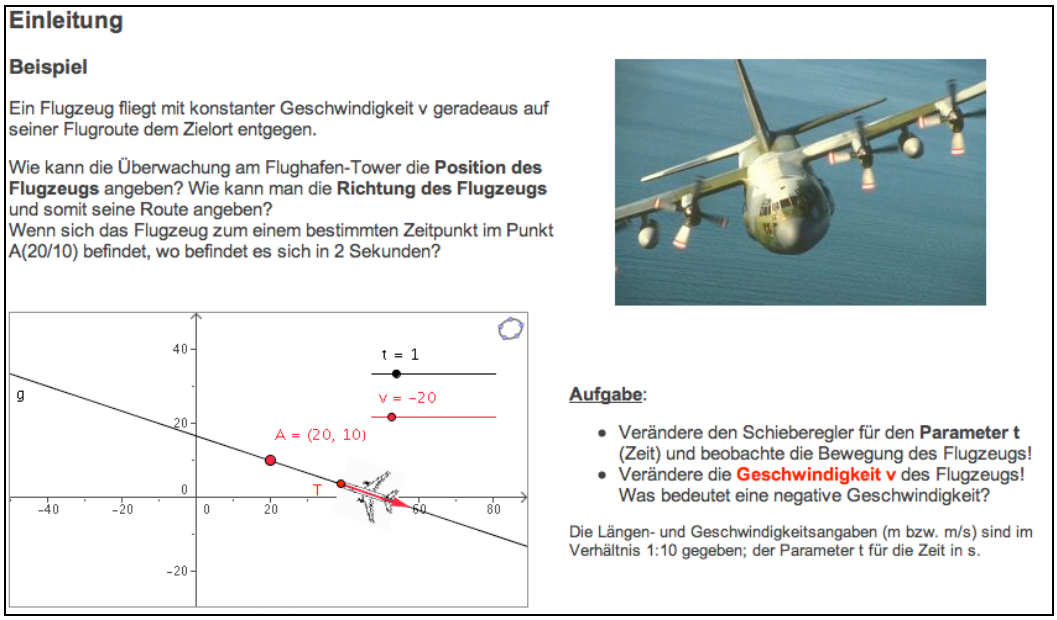


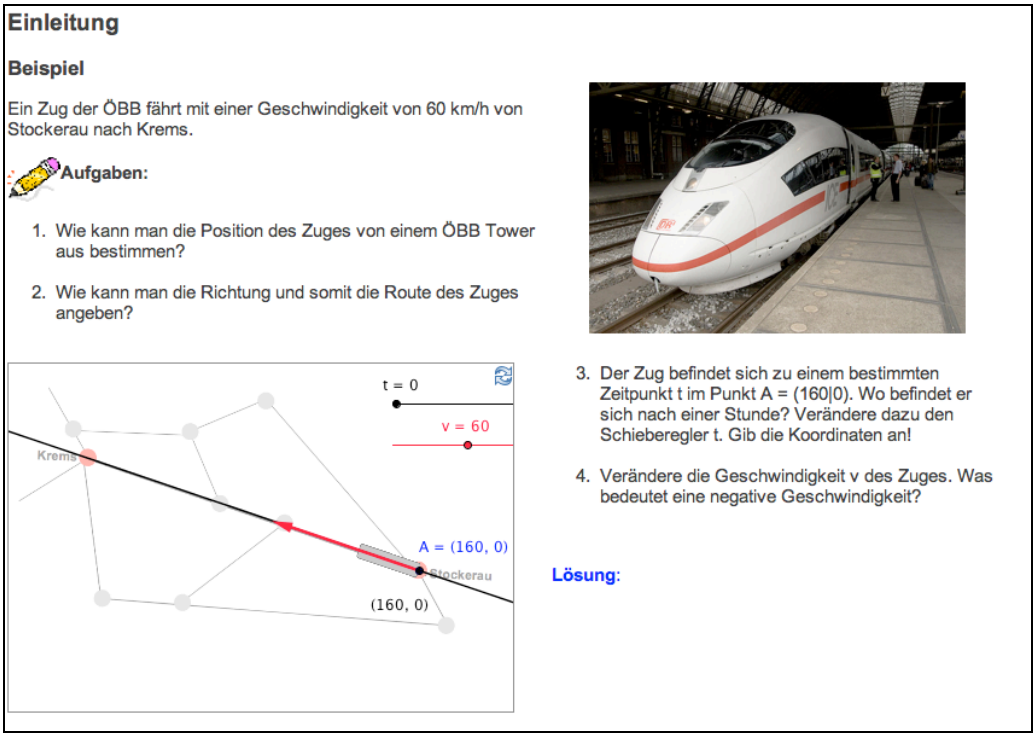

Abbildung 24: Einleitung vor der Überarbeitung

*„Die negative Geschwindigkeit v eines Flugzeuges ist etwas fraglich, an dieser Stelle wäre eventuell ein Zug passender“.*

*„Fragen oberhalb des Applets sowie Aufgaben zum interaktiven Applet sind nicht explizit beantwortet, ein Lösungslink wäre an dieser Stelle wünschenswert“.*

*„Bei der Bewegung des Schiebereglers t sollten die neuen Koordinaten des Flugzeugs angezeigt werden“.*

Diese drei Argumente wurden von den LehrerInnen bei der Fortbildungsveranstaltung am häufigsten rückgemeldet. Ich versuchte diese Argumente in meine Überarbeitung miteinzubeziehen.



**Einleitung**

**Beispiel**

Ein Zug der ÖBB fährt mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h von Stockerau nach Krems.

**Aufgaben:**

1. Wie kann man die Position des Zuges von einem ÖBB Tower aus bestimmen?
2. Wie kann man die Richtung und somit die Route des Zuges angeben?



3. Der Zug befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt t im Punkt A = (160|0). Wo befindet er sich nach einer Stunde? Verändere dazu den Schieberegler t. Gib die Koordinaten an!
4. Verändere die Geschwindigkeit v des Zuges. Was bedeutet eine negative Geschwindigkeit?

**Lösung:**

Abbildung 25: Einleitung nach der Überarbeitung

Die Einleitung wird nun anhand eines Zuges dargestellt (siehe Abbildung 25), dessen negative Geschwindigkeiten, also ein rückwärts fahren, durchaus der Realität entspricht. Außerdem strukturierte und formulierte ich die Fragestellungen neu. Ich fügte überdies, nicht nur auf dieser Seite sondern im gesamten Lernpfad, einen „*Lösungslink*“ hinzu. SchülerInnen sollen die Möglichkeit haben, möglichst selbstständig mit dem Lernpfad zu arbeiten und somit sich selbst zu kontrollieren.

Die Angabe eines Maßstabs hielt ich an dieser Stelle für überflüssig und richtete das Applet sowie alle anderen Angaben auf den Maßstab 1:1 aus. Außerdem änderte ich das interaktive Applet, sodass die Koordinaten des Zuges nach einer Bewegung angezeigt werden, was ebenfalls ein Wunsch einiger LehrerInnen aus der Fortbildung war.

Festhalten möchte ich, dass ich bei der Dokumentation der Überarbeitung des Lernpfads nicht auf Einzelheiten wie die Korrektur von Rechtschreibfehlern, Satzstellungen und sonstige kleine Veränderungen am Layout eingehe, da dies für die Qualität der Arbeit unerheblich ist.

Zu Beginn meiner Überarbeitung entschloss ich mich, Seiten bei denen man lange nach unten scrollen musste, um auf das Seitenende zu gelangen, auf zwei oder mehrere Seiten aufzuteilen. Mein Bestreben war, dass die einzelnen Seiten des Lernpfads maximal eine ganze Bildschirmseite ausfüllen, damit künftig kein störendes Scrollen nicht mehr erforderlich ist.

### 6.6.3. Pfeile

Eine dieser Seiten, welche für mein Empfinden etwas zu lang war, war jene des Kapitels „Pfeile“. Deshalb teilte ich die Seite passend auf drei eigene Seiten auf (siehe Abbildung 26, Abbildung 27 und Abbildung 28).

Die erste Seite beinhaltet nun eine kurze Definition des Pfeils $\overrightarrow{AE}$ sowie ein einführendes Beispiel zur Bestimmung der Koordinaten des Pfeils $\overrightarrow{AE}$, da die LehrerInnen der LehrerInnenfortbildung der Meinung waren, dass zu Beginn dieser Seite ein einführendes Beispiel angebracht wäre.

Außerdem einigte ich mich mit Herrn Prof. Hohenwarter auf die einheitliche Notation eines Punktes, wie zum Beispiel $A = (1|0)$, da diese Zeilenschreibweise in zahlreichen aktuellen Mathematikbüchern so gehandhabt wird und die Trennung der x und y Koordinaten durch einen „Schrägstrich„ (/) falscherweise als Division angesehen werden könnte. Das interaktive Applet sowie die Aufgabenstellung sind nach wie vor Teil dieser Seite.

SchülerInnen können im interaktiven Applet Anfangs- oder Endpunkt eines Pfeils beliebig bewegen und somit die Koordinatendarstellung des Pfeils, welche dynamisch angezeigt wird, verändern. Ein Merksatz schließt die erste Seite ab.

## Koordinaten von Pfeilen

Ein **Pfeil** $\overrightarrow{AE}$ ist ein geometrisches Objekt, das einen **Anfangspunkt A** und einen **Endpunkt E** besitzt.

**Beispiel:** Der Pfeil $\overrightarrow{AE}$ beschreibt den Weg vom Punkt A = (0|2) zum Punkt E = (2|1).

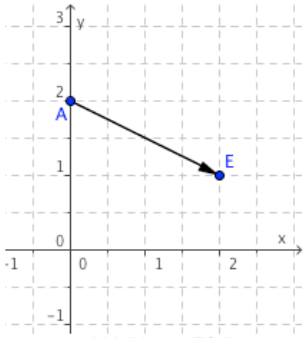


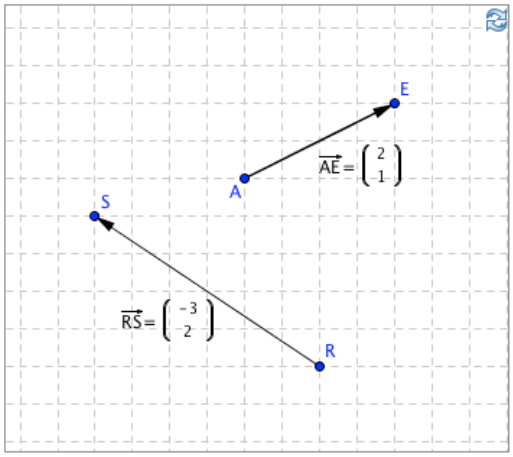
Abbildung: Pfeil

**Aufgabe:**

Bestimme die Koordinaten des Pfeils $\overrightarrow{AE}$?

**Lösung:**

Man kann einen Pfeil in einer **Zeilenform,** z.B. $\overrightarrow{AE}$ = (2|1) oder in einer **Spaltenform** $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ angeben. Die erste bzw. obere Zahl ist die x-Koordinate und die zweite bzw. untere Zahl die y-Koordinate des Pfeils.




**Aufgabe:**

1. Verändere Anfangs- und Endpunkt des Pfeils $\overrightarrow{AE}$ und des Pfeils $\overrightarrow{RS}$ und beobachte die Veränderung der Koordinaten!
2. Versuche einen Pfeil zu finden, dessen x-Koordinate negativ und dessen y-Koordinate positiv ist.
3. In welchem Fall sind beide Koordinaten negativ?
4. Worin können sich verschiedene Pfeile unterscheiden?

**Lösung:**

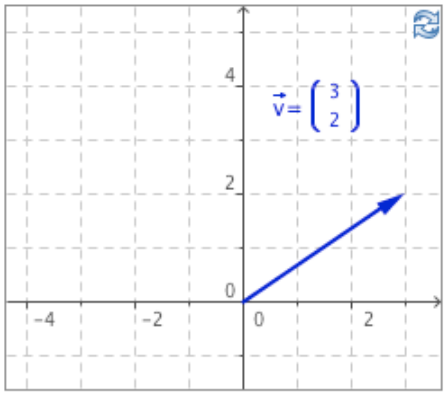
**Merksatz**: Alle Pfeile, die *gleich lang*, *parallel* zueinander und *gleich orientiert* sind, gehören zum selben **Vektor**.

Abbildung 26: Pfeile Teil 1 nach der Überarbeitung

Die zweite Seite beinhaltete eine konkrete Aufgabenstellung zum interaktiven Applet. Diese Aufgabe übernahm ich aus dem ursprünglichen Lernpfad. SchülerInnen müssen durch konkrete Anweisungen einen Pfeil $\vec{v}$ bewegen. Zusätzlich haben SchülerInnen die Aufgabe, einen Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Anfangspunkts A sowie des Endpunkts B und des Vektors $\vec{v}$ herzustellen.

**Pfeile und Vektoren**

Du siehst hier einen Pfeil.
Er ist die grafische Darstellung eines **Vektors** $\vec{v}$, dessen Koordinaten ebenfalls zu sehen sind.




**Aufgabe**

1. Ziehe den Pfeil $\vec{v}$ an seiner Spitze mit der Maus und beobachte dabei die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$. Wo liegt der Pfeil für die Koordinaten a) $\vec{v}$ = (1,0), b) $\vec{v}$ = (0,2)?
2. Ziehe jetzt den Pfeil an seinem Anfangspunkt. Was passiert mit den Koordinaten des Vektors $\vec{v}$? Schreibe deine Beobachtung auf.
3. Lies mit Hilfe des Koordinatengitters die aktuellen Koordinaten des Anfangspunktes und des Endpunktes des Pfeils ab. Nenne dabei den Anfangspunkt am besten A und den Endpunkt E.
4. Versuche einen Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Anfangspunktes A, des Endpunkts E und dem Vektor $\vec{v}$ herzustellen? Überprüfe deine Vermutung für mind. drei verschiedene Vektoren und schreib deine Ergebnisse auf.
5. Wie berechnet man die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$, wenn Anfangs- und Endpunkt des Pfeils allgemein gegeben sind: A = ($x_A$, $y_A$) und E = ( $x_E$, $y_E$)? Schreib deine Vermutung ebenfalls in dein Heft.

Lösung:

Abbildung 27: Pfeile Teil 2 nach der Überarbeitung

Die Definition zur Berechnung der Koordinaten eines Pfeils $\overrightarrow{AE}$ (siehe Abbildung 27), steht nach meiner Überarbeitung selbstständig auf einer Seite. In der bisherigen Version sollten SchülerInnen die Berechnung der Koordinaten eines Pfeils in der Aufgabe ermitteln, jedoch stand die Lösung unmittelbar darunter. Diese Seite soll für SchülerInnen zur Vervollständigung ihrer Notizen bzw. Mitschriften dienen.

**Zusammenfassung**

Wenn der Anfangspunkt A die Koordinaten ($x_A$, $y_A$) und der Endpunkt E die Koordinaten ($x_E$, $y_E$) besitzt, dann berechnet man die **Koordinaten des Pfeils** $\overrightarrow{AE}$ bzw. des Vektors $\vec{v}$

$$\overrightarrow{AE} = E - A = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix}$$

Kennt man allerdings die Koordinaten des Anfangspunktes A und des Pfeils $\overrightarrow{AE}$, so kann man die **Koordinaten des Endpunkts E** durch

$$E = A + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{AE} \\ y_{AE} \end{pmatrix}$$

berechnen.

Abbildung 28: Pfeile Teil 3 nach der Überarbeitung

### 6.6.4. Länge eines Pfeils

Die Seite „Länge eines Pfeils“ (siehe Abbildung 29) blieb im Großen und Ganzen unverändert. Über den Satz des Pythagoras lernen SchülerInnen die Berechnung der Länge eines Pfeils sowie anschließend die Länge eines Vektors kennen.

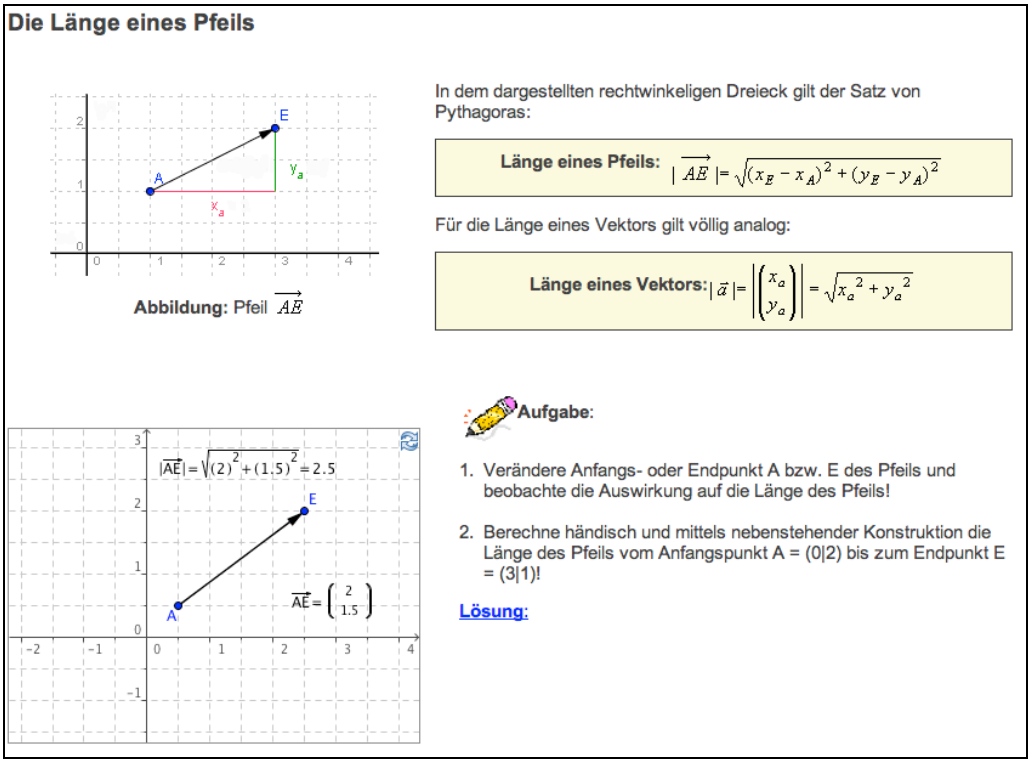



Abbildung 29: Länge eines Pfeils nach der Überarbeitung

Trotz des aufschlussreichen Beispiels, in dem die Länge eines Pfeils durch eine dynamische Formel angezeigt wird, war ich der Meinung, dass an dieser Stelle weitere Übungsbeispiele notwendig sind. Aus diesem Grund gestaltete ich eine zusätzliche Übungsseite zum Thema „Länge eines Pfeils“. Ich habe aufgrund der internen Evaluation zwei Beispiele zur Auswahl angeführt. SchülerInnen sollen die Möglichkeit haben, zwischen zwei Beispielen zu wählen, oder auch beide Beispiele zur Vertiefung ihres Wissens lösen zu können.

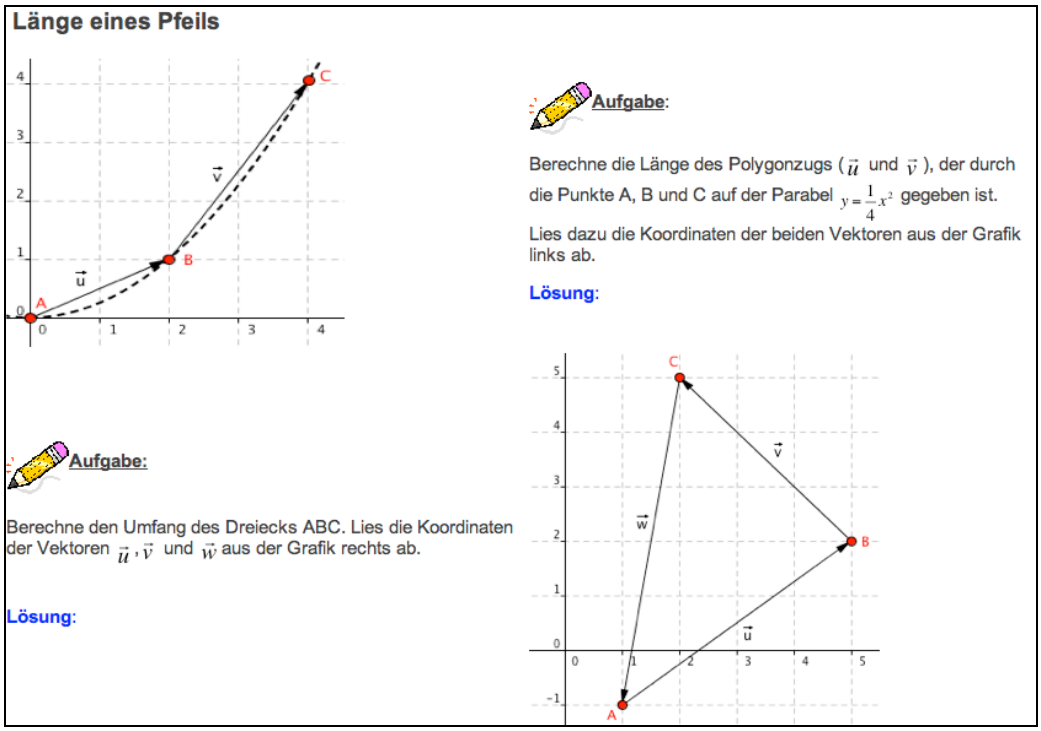



Abbildung 30: Aufgaben zu Länge eines Pfeils

Außerdem möchte ich mit diesen beiden Beispielen den SchülerInnen zeigen, dass Vektoren sehr vielseitig einsetzbar sind. Zum Einen kann man beispielsweise Vektoren gebrauchen, um einen Weg oder eine Strecke mit Vektoren zu approximieren oder zum Anderen ganz einfach nur, um den Umfang eines Dreiecks mit Vektoren zu berechnen.

### 6.6.5. Schiebung

Nach der Seite zur Schiebung sollten SchülerInnen wissen, dass ein Vektor auch für Verschiebungen eingesetzt werden kann. Durch Verändern von Punkten und Vektoren im interaktiven Applet sowie anschließender Aufgabenstellungen zur Berechnung des Umfangs der beiden Dreiecke lernen SchülerInnen die Anwendung eines Schiebevektors kennen.

Einige Zitate aus der LehrerInnenfortbildung zur ursprünglichen Seite:

*„Dass das Dreieck ABC hier veränderbar ist finde ich nicht gut, in einem eigenen Beispiel wäre das besser“.*

*„Es wäre besser, wenn im ersten Beispiel zur Schiebung nur s veränderbar wäre“.*

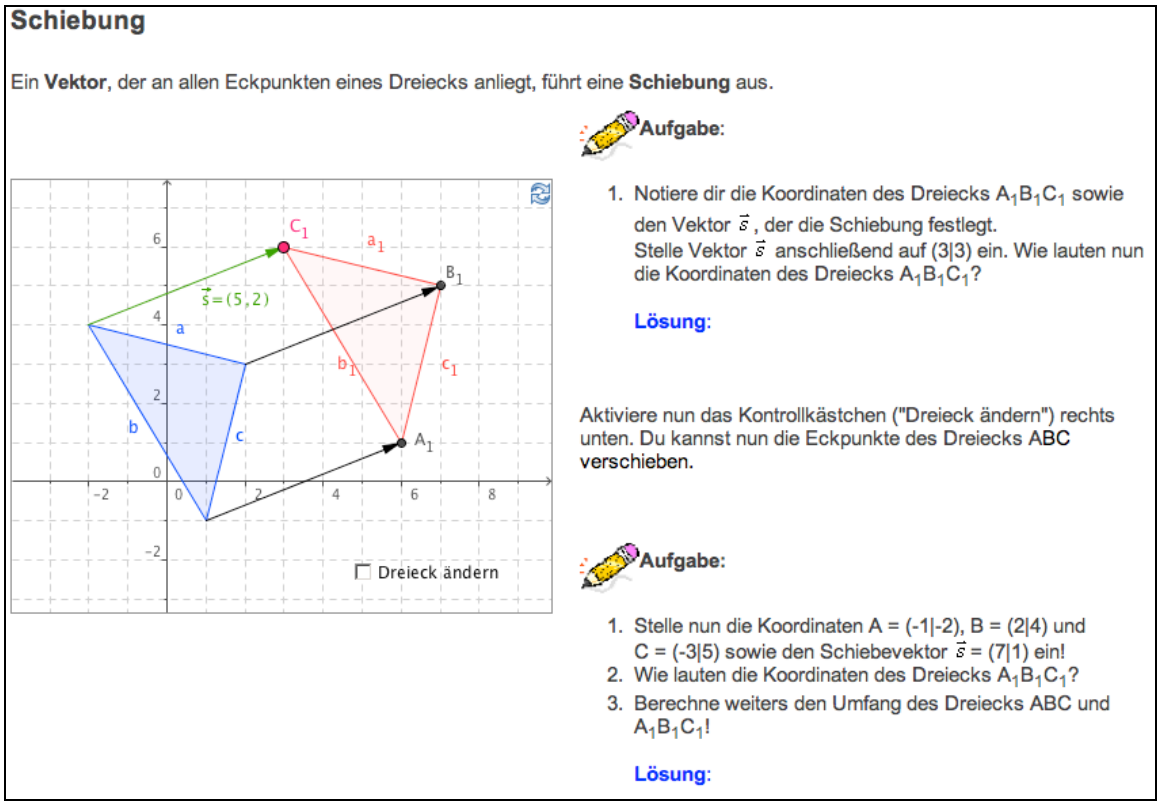



Abbildung 31: Schiebung nach der Überarbeitung

Ich versuchte diese beiden Anregungen umzusetzen. Ich wollte grundsätzlich nicht zwei Beispiele mit beinahe dem selben Dreieck anführen. Deshalb entschied ich mich dafür, ein Kontrollkästchen im interaktiven Applet anzubringen (siehe Abbildung 31). Dieses Kontrollkästchen „Dreieck ändern“ ist zu Beginn nicht aktiviert. Das bedeutet, dass anfänglich das Dreieck ABC nicht verändert werden kann. Erst nach schrittweisem Vorgehen entsprechend der Aufgabenstellung werden SchülerInnen aufgefordert das Kontrollkästchen zu aktivieren, sodass erst danach das Dreieck ABC verschoben werden kann.

Nun werde ich die Rechenarten von Vektoren beschreiben.

Ursprünglich wurde vor den Rechenarten wie Addition und Subtraktion von Vektoren der Gegenvektor im Lernpfad angeführt. Meines Erachtens macht diese Reihenfolge nicht viel Sinn, denn die Operation $\vec{a}-\vec{a}=0$ ist vor der Einführung der Addition und Subtraktion noch nicht erklärbar, da die SchülerInnen mit Vektoren noch nicht rechnen können. Daher halte ich den Einschub des Themas „Gegenvektor“ zwischen Addition und Subtraktion für sinnvoller.

### 6.6.6. Vektoraddition

Die einführende Seite zur Vektoraddition erfolgte durch die in Abbildung 32 dargestellte Seite. SchülerInnen wurden aufgefordert, Anfangs- und Endpunkte der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu verändern, um anschließend eine Formulierung für die Addition zweier Vektoren zu finden. Außerdem wurden sie darauf hingewiesen, dass beide Konstruktionen zur Vektoraddition gleichwertig sind, da die Vektoraddition auf zwei verschiedene Arten grafisch dargestellt werden kann.

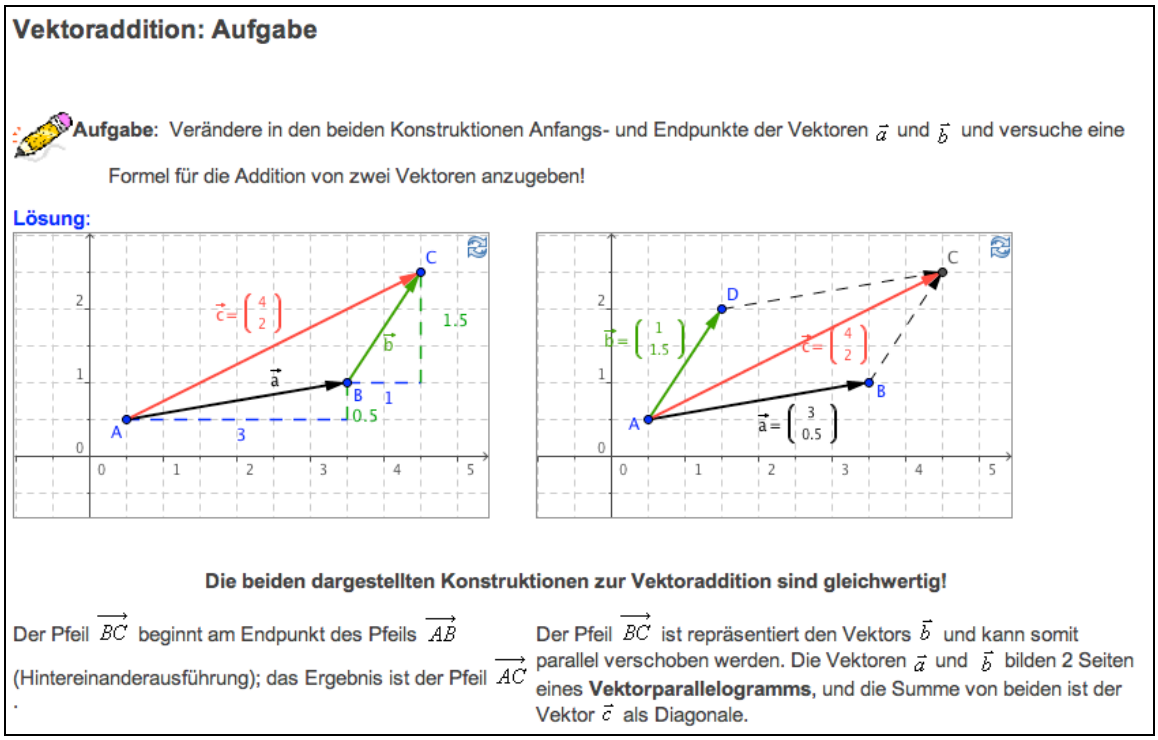
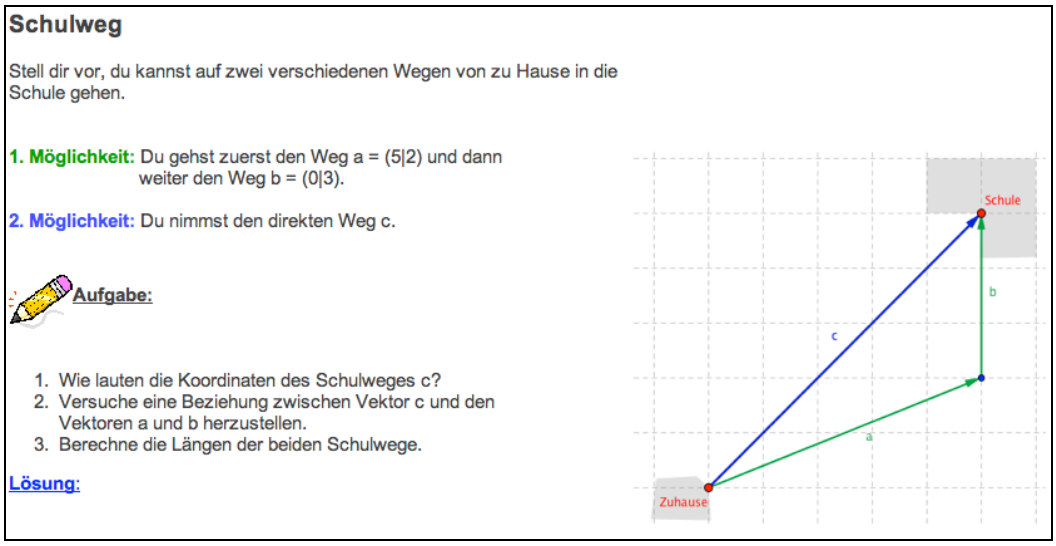



Abbildung 32: Vektoraddition nach der Überarbeitung

Ich beurteilte diese Seite für den Einstieg in die Vektorrechnung als etwas zu anspruchsvoll. Deshalb fertigte ich eine „neue“, für den Einstieg in diesen Themenkomplex einfachere, Seite an. Die in Abbildung 32 abgebildete Seite wurde von mir als anschließende Aufgabe konzipiert.



**Schulweg**

Stell dir vor, du kannst auf zwei verschiedenen Wegen von zu Hause in die Schule gehen.

**1. Möglichkeit:** Du gehst zuerst den Weg a = (5|2) und dann weiter den Weg b = (0|3).

**2. Möglichkeit:** Du nimmst den direkten Weg c.

**Aufgabe:**

1. Wie lauten die Koordinaten des Schulweges c?
2. Versuche eine Beziehung zwischen Vektor c und den Vektoren a und b herzustellen.
3. Berechne die Längen der beiden Schulwege.

**Lösung:**



Abbildung 33: Einstieg in die Vektoraddition nach der Überarbeitung

Das praxisorientierte einführende Beispiel besteht nun in der Berechnung der Koordinaten sowie der Länge eines Schulwegs. SchülerInnen sollen dabei schon eine mögliche Beziehung zwischen Vektor $\vec{c}$ und den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ herausfinden. Danach kommt, wie bereits erwähnt, die Aufgabe aus Abbildung 32. Den Verweis auf die Definitionen der Vektoraddition und Subtraktion entfernte ich von dieser Seite. Ich konnte mich nicht damit anfreunden, dass durch Aktivieren eines Links sofort die Definitionen der Addition und Subtraktion erschienen. Außerdem wird die Subtraktion erst in den nächsten Lernschritten behandelt, wodurch die Definition dieser Rechenart an dieser Stelle unlogisch ist. Ich bin der Meinung, dass Definitionen wie jene der Addition und Subtraktion von Vektoren präzise auf eine Seite platziert werden sollten:

**Vektoraddition: Definition und Aufgabe**

Zwei Vektoren werden auf folgende Art rechnerisch addiert:

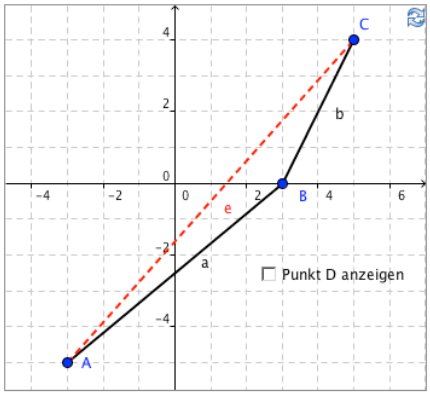
$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} x_a \\ y_b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_a+x_b \\ y_b+y_b \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:**

1. Von einem Dreieck ABC kennt man die Koordinaten der Seite a = (6|5) und der Seite b = (2|4). Berechne die Koordinaten und die Länge der **Seite e**.

   Ergänze nun das Dreieck zu einem Parallelogramm ABCD, indem du das Kontrollkästchen rechts unten aktivierst!

2. Berechne nun **Punkt D**. Lies dazu die benötigten Punkte ab.
3. Berechne weiters den Umfang des Parallelogrammes ABCD.




**Lösung**:

Abbildung 34: Definition & Aufgabe nach der Überarbeitung

Hinzugefügt wurde ein Beispiel mit einem interaktiven Applet, anhand dessen man vorerst die Koordinaten sowie die Länge der fehlenden Seite e berechnen muss. Durch Aktivieren des Kontrollkästchens „Punkt D anzeigen“ wird das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ABCD ergänzt. Die SchülerInnen sollen nun Punkt D berechnen und bereits Gelerntes anwenden.

### 6.6.7. Gegenvektor

Im ursprünglichen Lernpfad wurde „definiert“ dass der Vektor $-\vec{a}$ zum Vektor $\vec{a}$ entgegengesetzt ist. Durch Verändern des Anfangs- und Endpunkts des Vektors $\vec{a}$ konnten die SchülerInnen die Veränderung der Koordinaten, welche durch einen dynamischen Text im Applet dargestellt wurden, beobachten. Anschließend wurde Vektor $\vec{a}$ von Vektor $\vec{a}$ subtrahiert. Da aber entsprechend dem bisher im Lernpfad Gelernten noch immer nicht subtrahiert werden kann, ist die angeführte Rechnung in Abbildung 35 nicht vorteilhaft. Außerdem sollte nach Meinung einiger LehrerInnen aus der Fortbildung die Definition des Nullvektors (siehe Abbildung 36) deutlicher gemacht, und nicht hinter einem Link „versteckt“ werden.

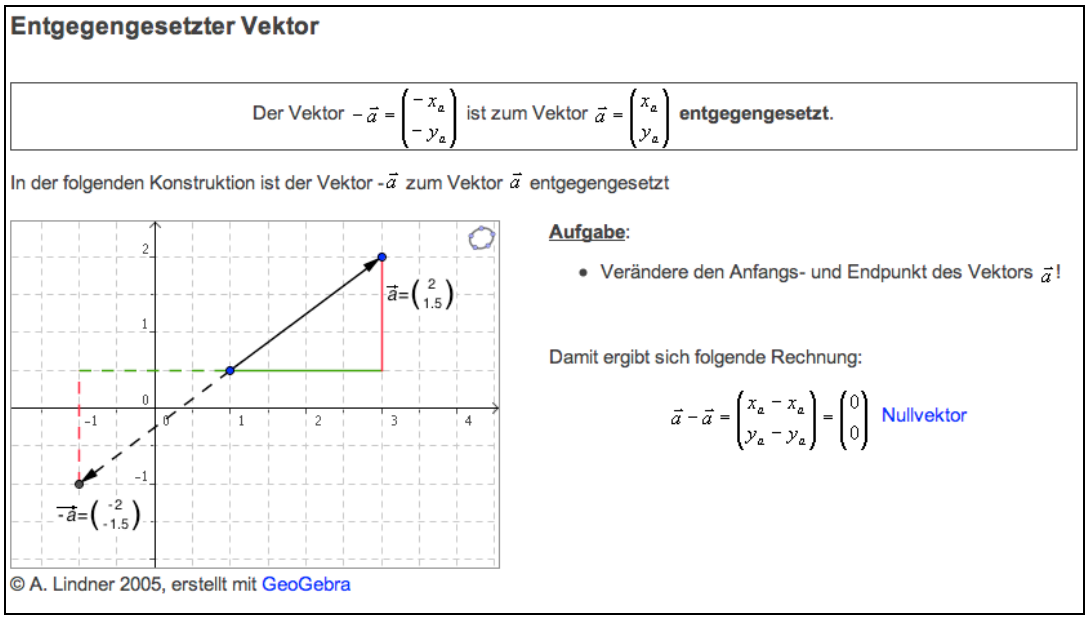



Abbildung 35: Gegenvektor vor der Überarbeitung

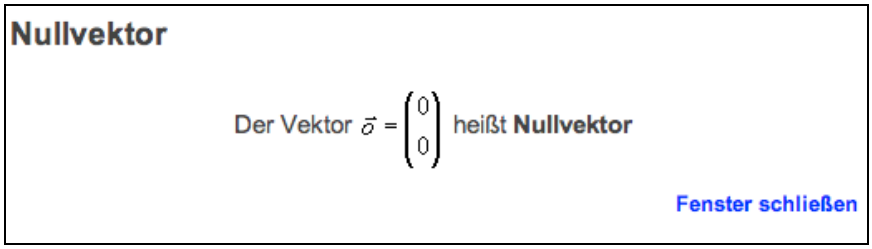



Abbildung 36: Link des Nullvektors vor der Überarbeitung

Deshalb entschloss ich mich dazu, den Nullvektor über die Addition des Vektors $\vec{a}$ mit dessen Gegenvektor, also $-\vec{a}$ herzuleiten (siehe Abbildung 37).

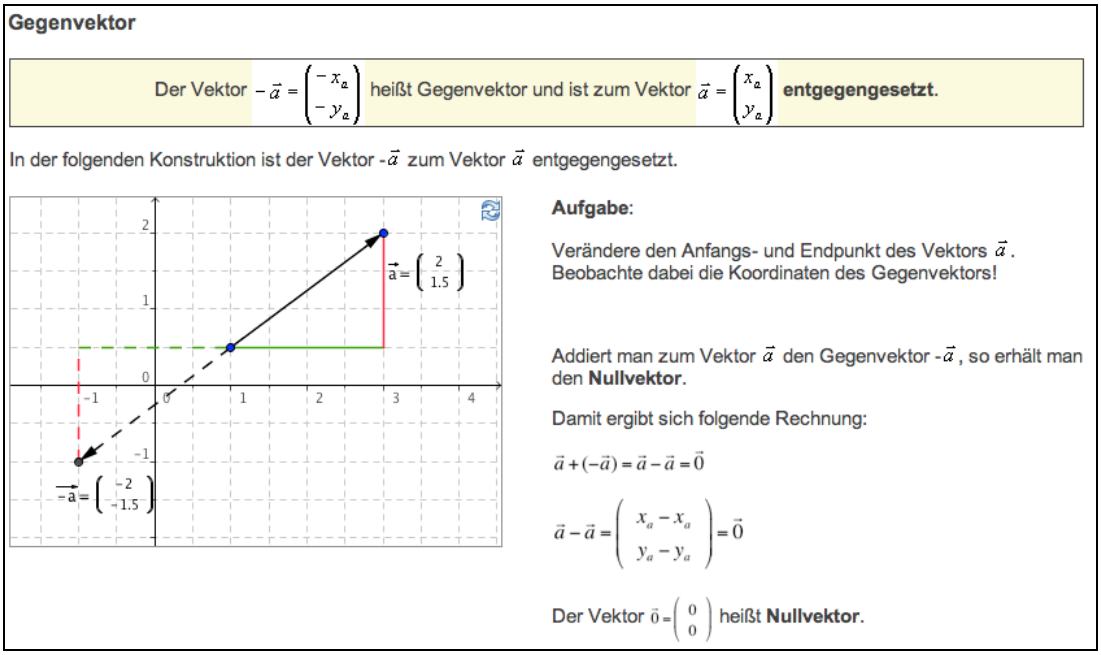



Abbildung 37: Gegenvektor nach der Überarbeitung

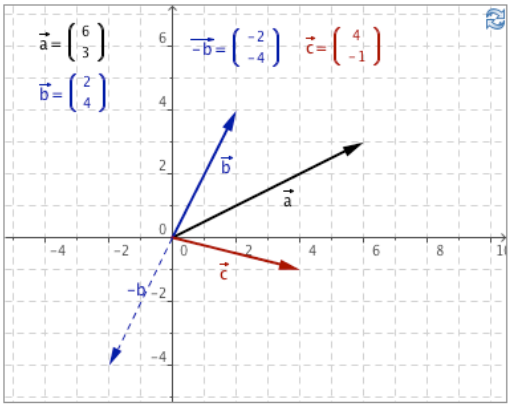
Die SchülerInnen sollen hier erkennen, dass die Addition eines Vektors $\vec{a}$ mit dem Gegenvektor $-\vec{a}$ genau die Subtraktion der beiden Vektoren ist und den Nullvektor ergibt.

### 6.6.8. Vektorsubtraktion

Die Seite übernahm ich zur Gänze aus dem bereits bestehenden Lernpfad. Durch verschiedenste Aufgabenstellungen zum interaktiven Applet wurden SchülerInnen Schritt für Schritt zur Vektorsubtraktion geführt. Da aber die Lösung zu den Aufgabenstellungen lediglich durch einen Verweis auf die Seite der Addition erfolgte, erstellte ich eine zusätzliche Seite mit der entsprechenden Definition (siehe Abbildung 39) der Vektorsubtraktion sowie einem zusätzlichen Beispiel.

**Vektorsubtraktion**

Du siehst hier die Pfeile der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, den Gegenvektor $-\vec{b}$, sowie den Vektor der Differenz $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.




**Aufgaben:**

1. Ziehe an den Spitzen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Beobachte dabei die Koordinaten von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

   Wie berechnet man die Koordinaten des Vektors $\vec{c}$? Gib zunächst zwei Beispiele mit konkreten Zahlen an.

   Versuche auch eine allgemeine Formel für die Koordinaten von $\vec{c} = (x_c, y_c)$ anzugeben, wenn $\vec{a} = (x_a, y_a)$ und $\vec{b} = (x_b, y_b)$ sind.
2. Verschiebe den Anfangspunkt von $\vec{a}$ zur Spitze von $-\vec{b}$ (dem Gegenvektor von $\vec{b}$). Ziehe nun die Spitze von $\vec{a}$. Was fällt dir auf? Schreibe deine Beobachtung zusammen mit einer Skizze in dein Heft.
3. Verschiebe den Anfangspunkt von $\vec{b}$ zur Spitze von $\vec{a}$. Ziehe nun die Spitze von $\vec{b}$. Was fällt dir auf? Schreibe deine Beobachtung zusammen mit einer Skizze in dein Heft.
4. Versuche mit Hilfe deiner Ergebnisse von (2) und (3) einen Zusammenhang zwischen $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ und der Vektoraddition herzustellen. Schreibe deine Überlegungen auf.

   **Lösung:**

Abbildung 38: Vektorsubtraktion nach der Überarbeitung

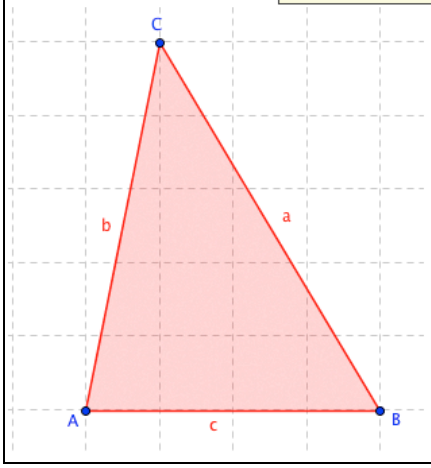
SchülerInnen sollen durch die Verwendung der Subtraktion von Vektoren die fehlende Seite des Dreiecks (siehe Abbildung 39) berechnen.

**Vektorsubtraktion: Definition und Übung**

Die Addition des Vektors $\vec{a}$ mit dem Gegenvektor $\vec{b}$ ist die Subtraktion bzw. Differenz.

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{pmatrix}$$




**Aufgabe:**

Berechne den Vektor der Seite **c** des Dreiecks ABC, wenn die Vektoren $\overrightarrow{CB}$ = (3|-5) und $\overrightarrow{CA}$ = (-1|-5) gegeben sind.

**Lösung:**

Abbildung 39: Definition und Aufgabe nach der Überarbeitung

*„Eine Übung wäre hilfreich, wo man Vektoren in einer Zeichnung beschriften muss“.*

Herr Prof. Hohenwarter hat mir bezüglich dieses Zitats aus der LehrerInnenfortbildung das in Abbildung 40 dargestellte, überaus passende Applet zur Verfügung gestellt.

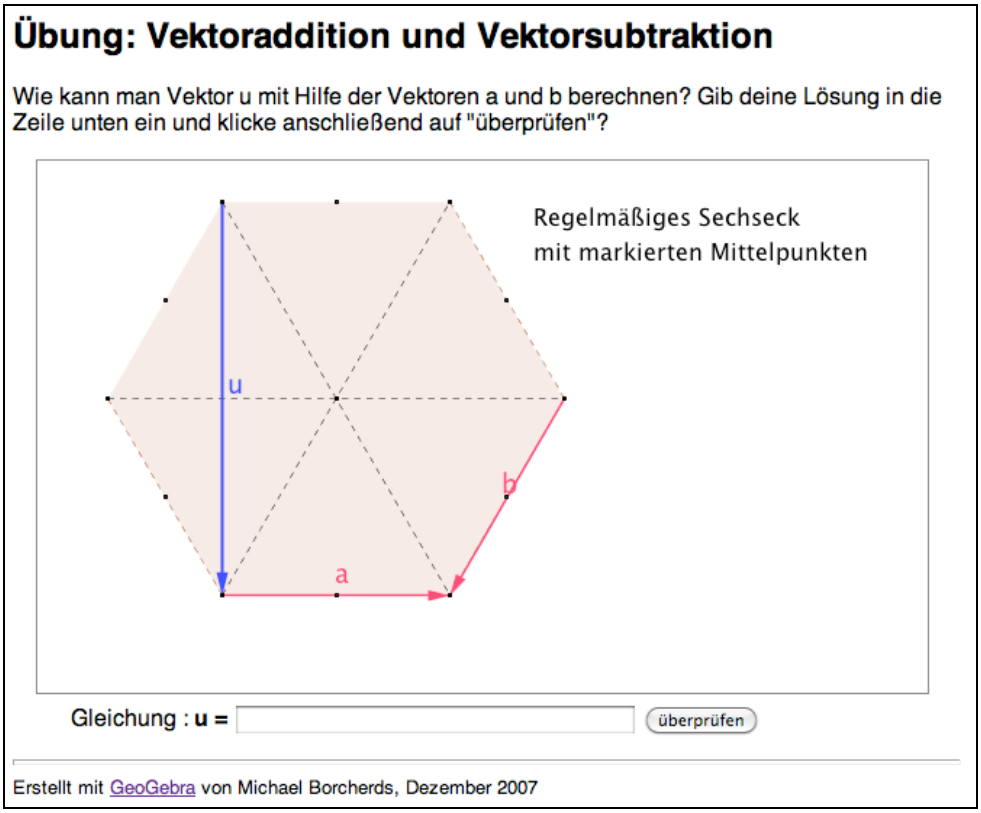



Abbildung 40: Vektortest

SchülerInnen können hier durch einen Selbsttest bisher Gelerntes überprüfen. Sie sollen erkennen, wie sich Vektor $\vec{u}$ durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lässt. Durch betätigen des Buttons „überprüfen“ können SchülerInnen ihre Eingabe schnell und einfach kontrollieren. Die Eingabe $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ wäre beispielsweise eine Lösung für die oben abgebildeten Vektoren.

### 6.6.9. Rechenregeln

**Rechenregeln**

Für die **Addition mit Vektoren** gelten folgende **Grundgesetze**:

| | |
|---|---|
| **Assoziativgesetz** | $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ |
| **Kommutativgesetz** | $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ |
| **Neutrales Element** | $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ |
| **Inverses Element** | $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$ |
| **Doppelte Verneinung** | $-(-\vec{a})=\vec{a}$ |
| **Klammernsetzung** | $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ |

**Merkregel**
**Mit Vektoren** kann man in Hinblick auf die Addition und Subtraktion **wie mit reellen Zahlen rechnen**; es gelten dieselben Rechenregeln!

Abbildung 41: Rechenregeln vor der Überarbeitung

„Friss Vogel“ war ein Zitat einer Lehrkraft zu dieser Seite, in Abbildung 41 dargestellt, wobei ich dem völlig zustimmen kann. Die Regeln werden ohne Erklärung oder grafische Darstellung einfach aufgezählt. Bilder (wie Abbildung 42) zu den einzelnen Rechenregeln wären hier angebracht, da sich dadurch die SchülerInnen Rechenregeln von Vektoren, auch wenn diese bezüglich reeller Zahlen durchaus schon geläufig sind, etwas besser vorstellen können.

**Rechenregeln**

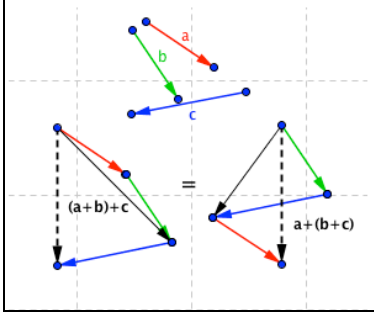
**Merkregel:**

**Mit Vektoren** kann man in Hinblick auf Addition und Subtraktion **wie mit reellen Zahlen rechnen**.
Es gelten dieselben Rechenregeln!

Für die **Addition mit Vektoren** gelten folgende **Rechengesetze**:

**Aufgabe:**
Arbeite die Regeln gewissenhaft durch, sodass du anschließend mit den Regeln problemlos rechnen kannst.

**Assoziativgesetz:** $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$




**Kommutativgesetz:** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

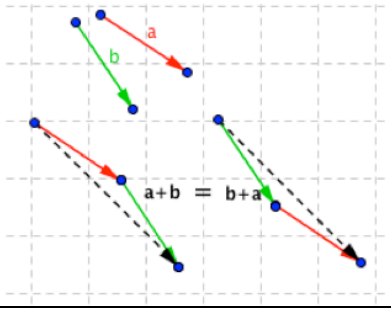



Abbildung 42: Rechenregeln Teil 1 nach der Überarbeitung

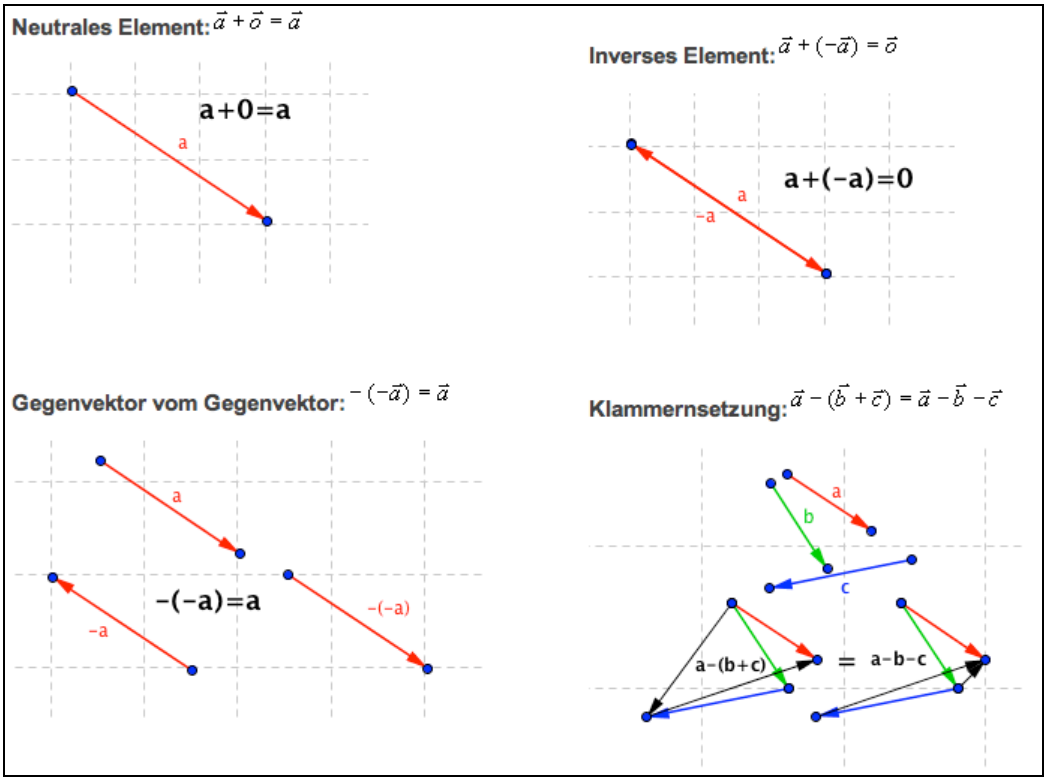
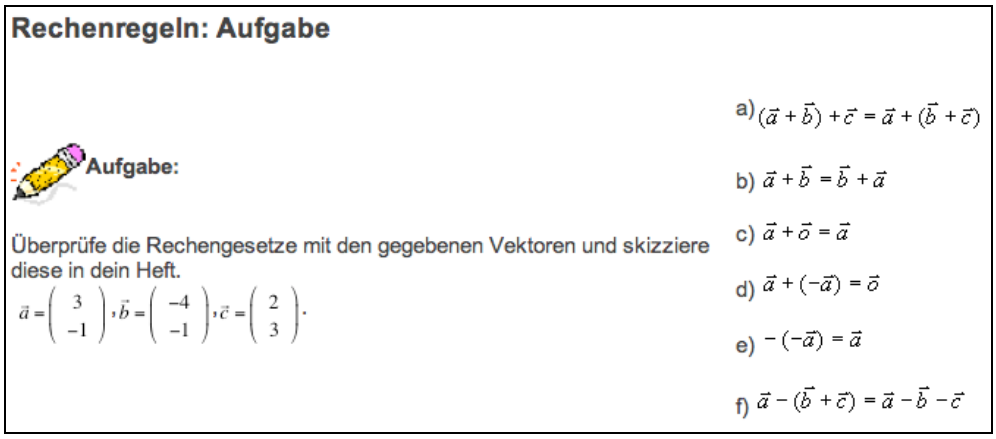



Abbildung 43: Rechenregeln Teil 2 nach der Überarbeitung

Als Übung zu diesen Rechenregeln sollen sich SchülerInnen anhand von gegebenen Vektoren mit den Regeln nochmals beschäftigen und die Regeln selbstständig mit GeoGebra oder händisch nachkonstruieren (siehe Abbildung 44).



**Rechenregeln: Aufgabe**

**Aufgabe:**

Überprüfe die Rechengesetze mit den gegebenen Vektoren und skizziere diese in dein Heft.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$

a) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

b) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

c) $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$

d) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$

e) $-(-\vec{a})=\vec{a}$

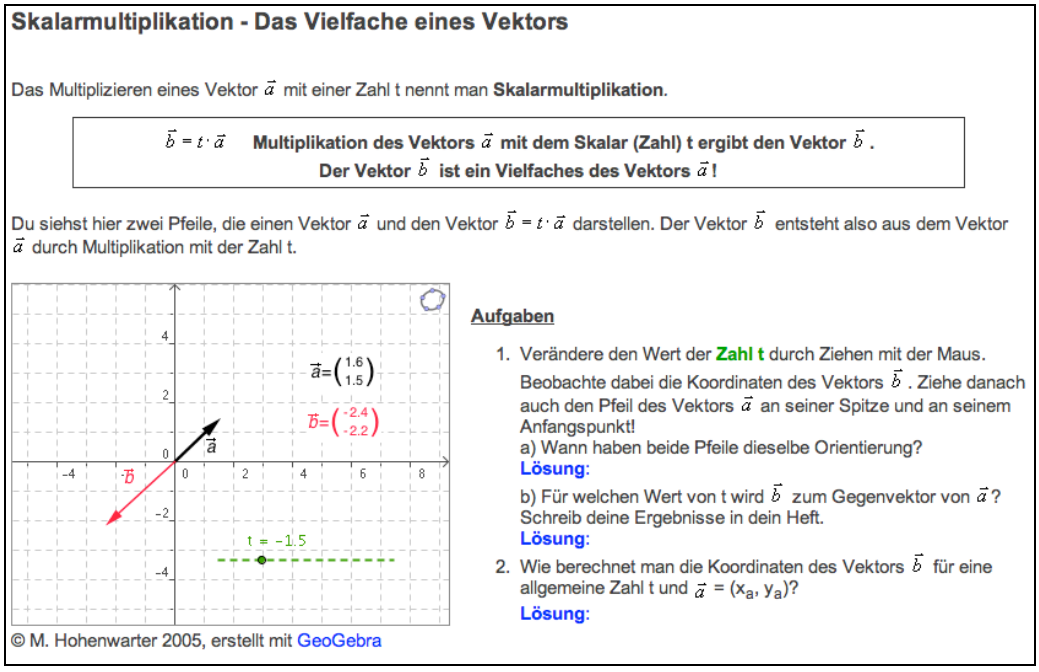
f) $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

Abbildung 44: Aufgabe nach der Überarbeitung

## 6.6.10. Vielfaches von Vektoren

Bei diesem Kapitel veränderte ich inhaltlich nichts, ich teilte die Seite lediglich auf zwei einzelne Seiten auf.

SchülerInnen lernen an dieser Stelle die Definition der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl kennen. Das explorative Arbeiten mit dem interaktiven Applet ermöglicht den SchülerInnen, sich selbstständig die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar zu erarbeiten.



**Skalarmultiplikation - Das Vielfache eines Vektors**

Das Multiplizieren eines Vektor $\vec{a}$ mit einer Zahl t nennt man **Skalarmultiplikation**.

$\vec{b} = t \cdot \vec{a}$ **Multiplikation des Vektors $\vec{a}$ mit dem Skalar (Zahl) t ergibt den Vektor $\vec{b}$.**
**Der Vektor $\vec{b}$ ist ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$!**

Du siehst hier zwei Pfeile, die einen Vektor $\vec{a}$ und den Vektor $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$ darstellen. Der Vektor $\vec{b}$ entsteht also aus dem Vektor $\vec{a}$ durch Multiplikation mit der Zahl t.



© M. Hohenwarter 2005, erstellt mit GeoGebra

**Aufgaben**

1. Verändere den Wert der **Zahl t** durch Ziehen mit der Maus.
   Beobachte dabei die Koordinaten des Vektors $\vec{b}$. Ziehe danach auch den Pfeil des Vektors $\vec{a}$ an seiner Spitze und an seinem Anfangspunkt!
   a) Wann haben beide Pfeile dieselbe Orientierung?
   **Lösung:**
   b) Für welchen Wert von t wird $\vec{b}$ zum Gegenvektor von $\vec{a}$? Schreib deine Ergebnisse in dein Heft.
   **Lösung:**
2. Wie berechnet man die Koordinaten des Vektors $\vec{b}$ für eine allgemeine Zahl t und $\vec{a} = (x_a, y_a)$?
   **Lösung:**

Abbildung 45: Vielfaches von Vektoren Teil 1

Anschließend bekommen SchülerInnen einen weiteren Input. Eine Skalarmultiplikation kann man auch mit Hilfe des Strahlensatzes darstellen.

Grundsätzlich finde ich die Seite „Vielfaches von Vektoren“ sehr gut strukturiert und verständlich. Die LehrerInnen der Fortbildung stellten zusätzlich fest, dass die Einführung der Skalarmultiplikation mit Hilfe des Strahlensatzes (siehe Abbildung 46) nicht notwendig wäre und man dies als Zusatzaufgabe oder Anwendungsbeispiel verwenden könnte.

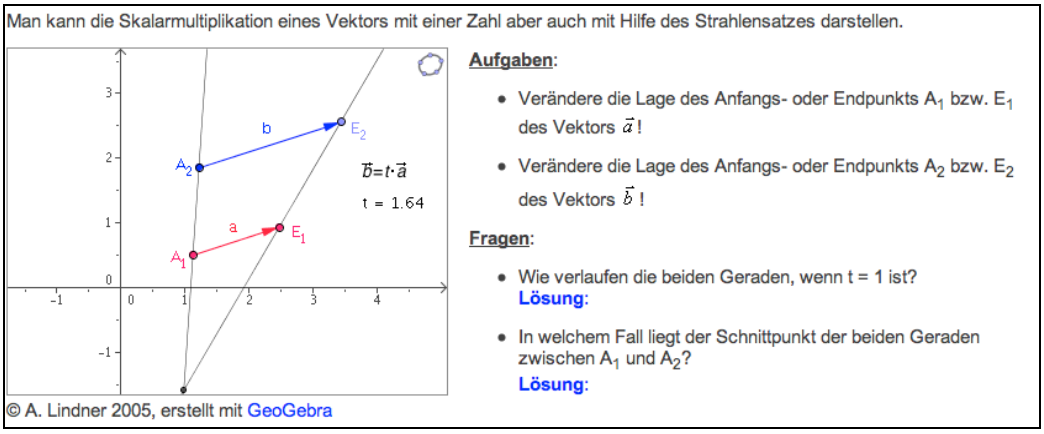


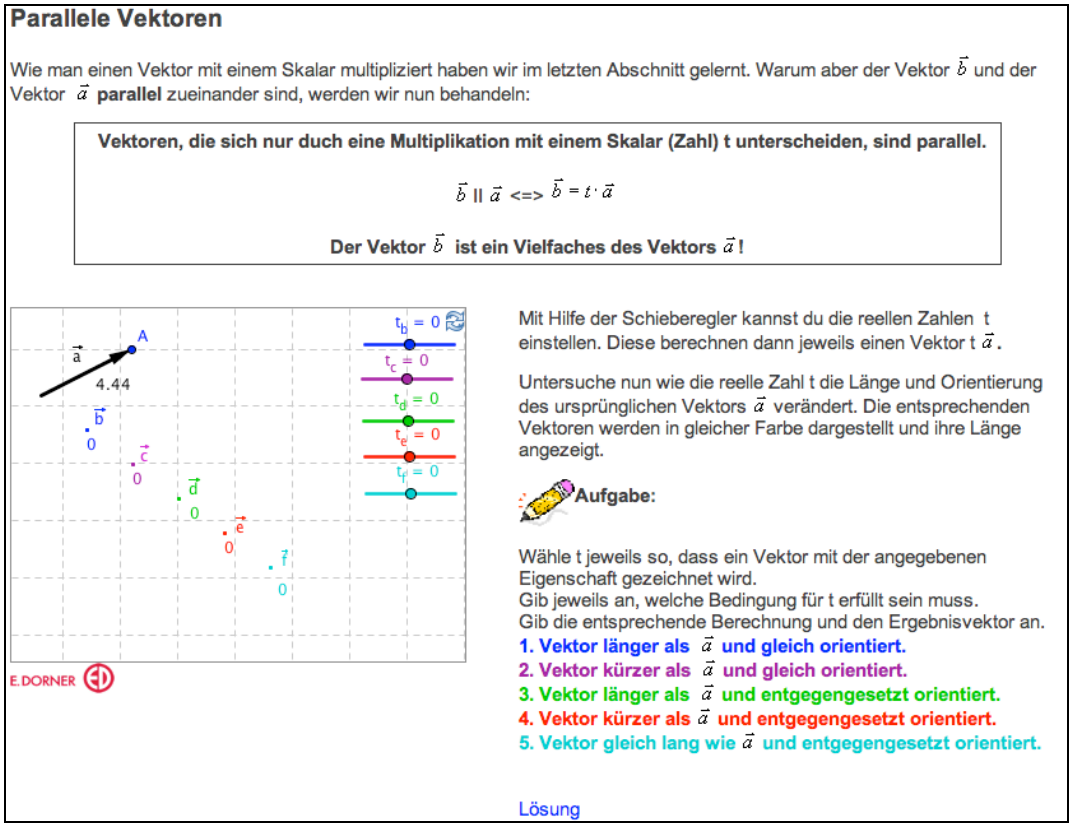

Abbildung 46: Vielfaches von Vektoren Teil 2

Während der Überarbeitung des Lernpfads recherchierte ich zusätzlich in verschiedensten aktuellen Mathematikbüchern der 5. Klasse und verglich die Vorgehensweise bei der Erklärung der Vektorrechnung.

Dabei fiel mir auf, dass der Sachinhalt „parallele Vektoren“ beim Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene nicht konkret behandelt wurde, obwohl in allen Mathematikbüchern großer Wert auf die Parallelität von Vektoren gelegt wird. Ich gestaltete, nach Rücksprache mit Herrn Prof. Hohenwarter, eine zusätzliche Seite zu diesem fehlenden, meiner Meinung nach wichtigen, Sachinhalt.

### 6.6.11. Parallele Vektoren

Durch einen einleitenden Satz versuchte ich einen Übergang von „Vielfachen von Vektoren“ zu „Parallele Vektoren“ zu schaffen. Nach der Definition haben SchülerInnen die Möglichkeit mit einem interaktiven Applet und dazugehörigen Anweisungen zu arbeiten, was zur Festigung des neuen Lerninhalts dienen soll.



**Parallele Vektoren**

Wie man einen Vektor mit einem Skalar multipliziert haben wir im letzten Abschnitt gelernt. Warum aber der Vektor $\vec{b}$ und der Vektor $\vec{a}$ **parallel** zueinander sind, werden wir nun behandeln:

**Vektoren, die sich nur duch eine Multiplikation mit einem Skalar (Zahl) t unterscheiden, sind parallel.**

$\vec{b} \parallel \vec{a} \iff \vec{b} = t \cdot \vec{a}$

**Der Vektor $\vec{b}$ ist ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$!**



Mit Hilfe der Schieberegler kannst du die reellen Zahlen t einstellen. Diese berechnen dann jeweils einen Vektor t $\vec{a}$.

Untersuche nun wie die reelle Zahl t die Länge und Orientierung des ursprünglichen Vektors $\vec{a}$ verändert. Die entsprechenden Vektoren werden in gleicher Farbe dargestellt und ihre Länge angezeigt.

**Aufgabe:**

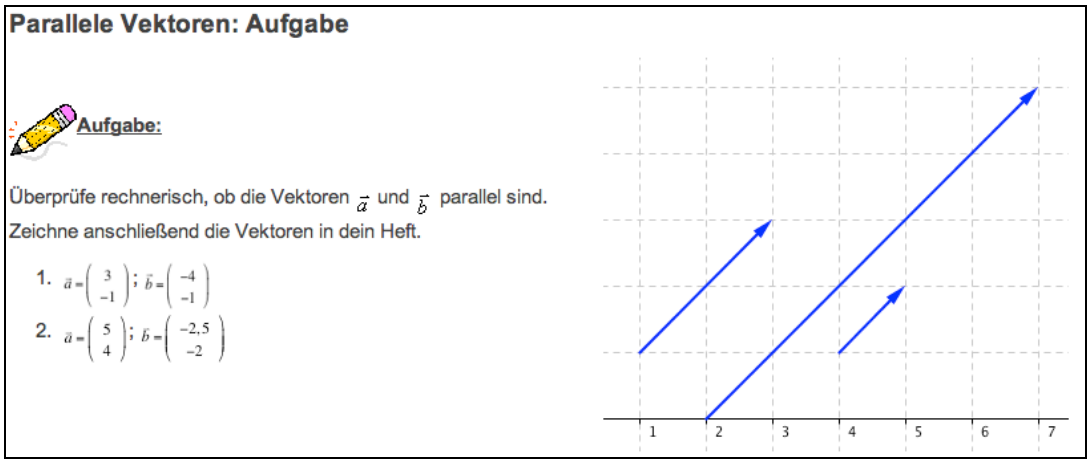
Wähle t jeweils so, dass ein Vektor mit der angegebenen Eigenschaft gezeichnet wird.
Gib jeweils an, welche Bedingung für t erfüllt sein muss.
Gib die entsprechende Berechnung und den Ergebnisvektor an.

1. Vektor länger als $\vec{a}$ und gleich orientiert.
2. Vektor kürzer als $\vec{a}$ und gleich orientiert.
3. Vektor länger als $\vec{a}$ und entgegengesetzt orientiert.
4. Vektor kürzer als $\vec{a}$ und entgegengesetzt orientiert.
5. Vektor gleich lang wie $\vec{a}$ und entgegengesetzt orientiert.

Lösung

Abbildung 47: Parallele Vektoren nach der Überarbeitung

Die Idee des interaktiven Applets holte ich mir von einer beiliegenden CD des Lehrbuchs Dimensionen Mathematik 5 vom Verlag E.Dorner (vgl. Bleier et al., 2009, S. 207)



**Parallele Vektoren: Aufgabe**

**Aufgabe:**

Überprüfe rechnerisch, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind.
Zeichne anschließend die Vektoren in dein Heft.

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$



Abbildung 48: Parallele Vektoren Aufgabe

Ein Beispiel zu parallelen Vektoren soll das Gelernte festigen, wobei SchülerInnen nicht nur grafisch sondern auch rechnerisch gegebene Vektoren auf ihre Parallelität überprüfen sollen.

### 6.6.12. Anwendungsbeispiele zur Vektorrechnung

Die nächsten Seiten, auf denen ich meine Überarbeitung dokumentiere, handeln von Anwendungsbeispielen der Vektorrechnung. Die Anwendungsbeispiele aus der Physik beziehungsweise aus dem alltäglichen Leben sollen SchülerInnen die vielfältige Einsetzbarkeit der Vektoren zeigen.

Die folgenden Seiten, wie Einleitung (siehe Abbildung 49), Beleuchtung (siehe Abbildung 50) und Laterne (siehe Abbildung 51) blieben in den Grundsätzen erhalten, wobei ich jedoch die interaktiven Applets mit Bildern hinterlegte, sodass die Applets etwas ansprechender werden, worüber auch bei der internen Evaluation diskutiert wurde.

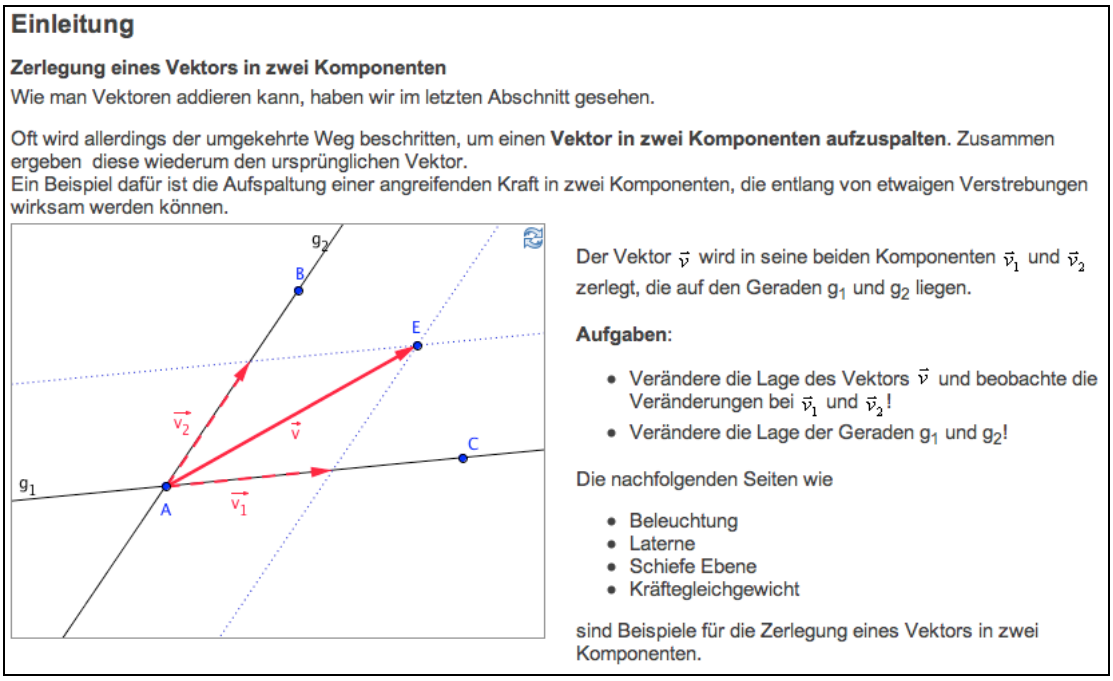



Abbildung 49: Einleitung nach der Überarbeitung

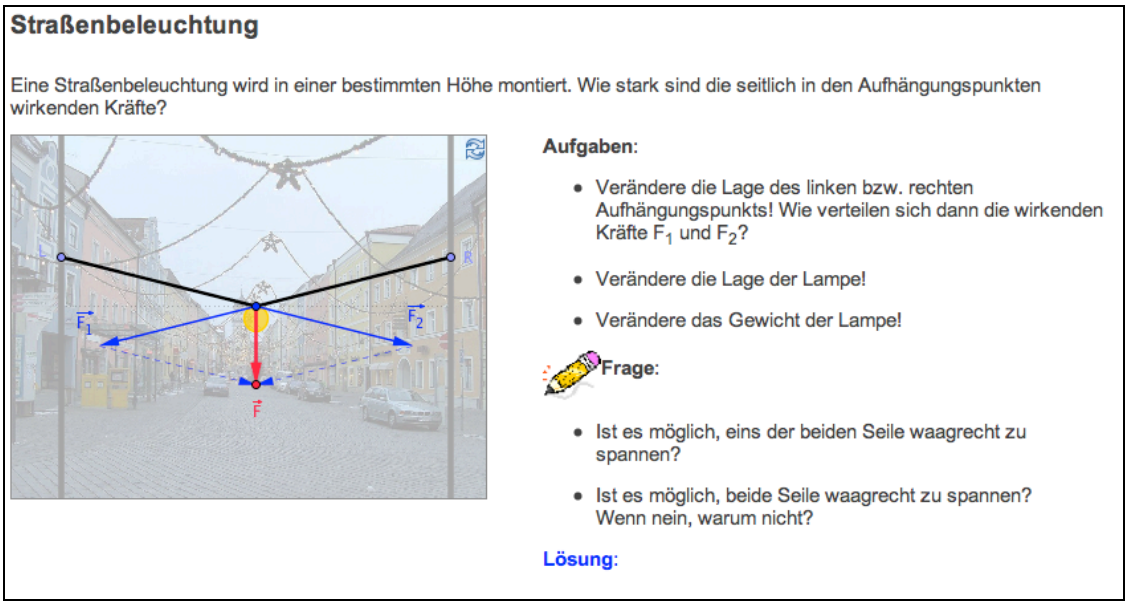



Abbildung 50: Beleuchtung nach der Überarbeitung

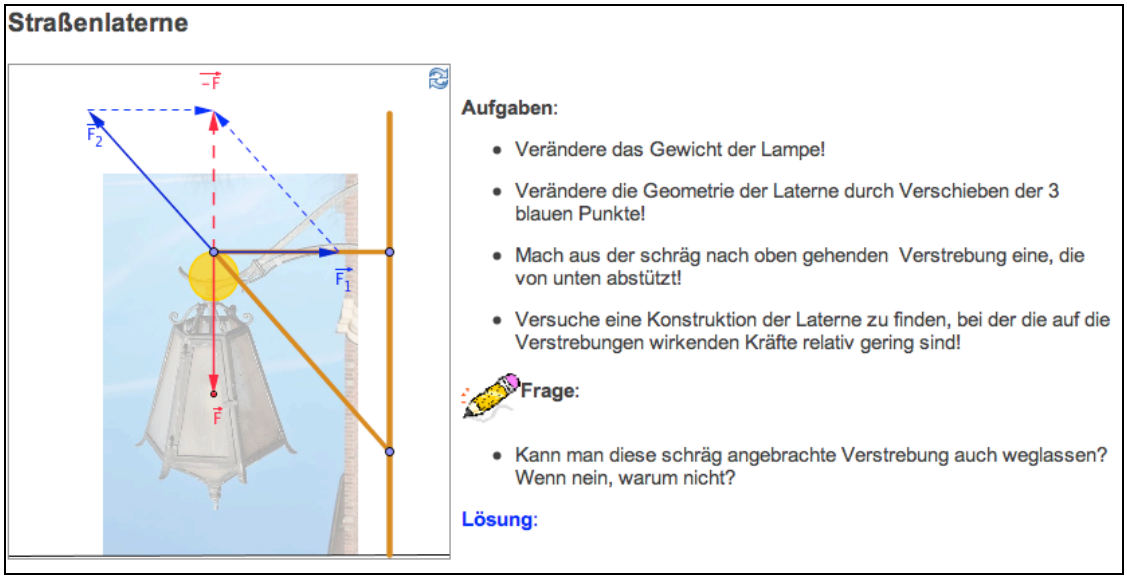



Abbildung 51: Laterne nach der Überarbeitung

Das Anwendungsbeispiel „Schiefe Ebene“ soll zeigen, dass eine Verbindung von mathematischen Aufgaben mit hinterlegten Bildern und die Verknüpfung von abstrakter Rechnung mit einer anschaulichen Anwendung die Motivation der SchülerInnen erhöhen kann. Durch kurze Aufgabenstellung zum Thema sollen SchülerInnen im interaktiven Applet Veränderungen vornehmen und dabei die wirkenden Kräfte beobachten.

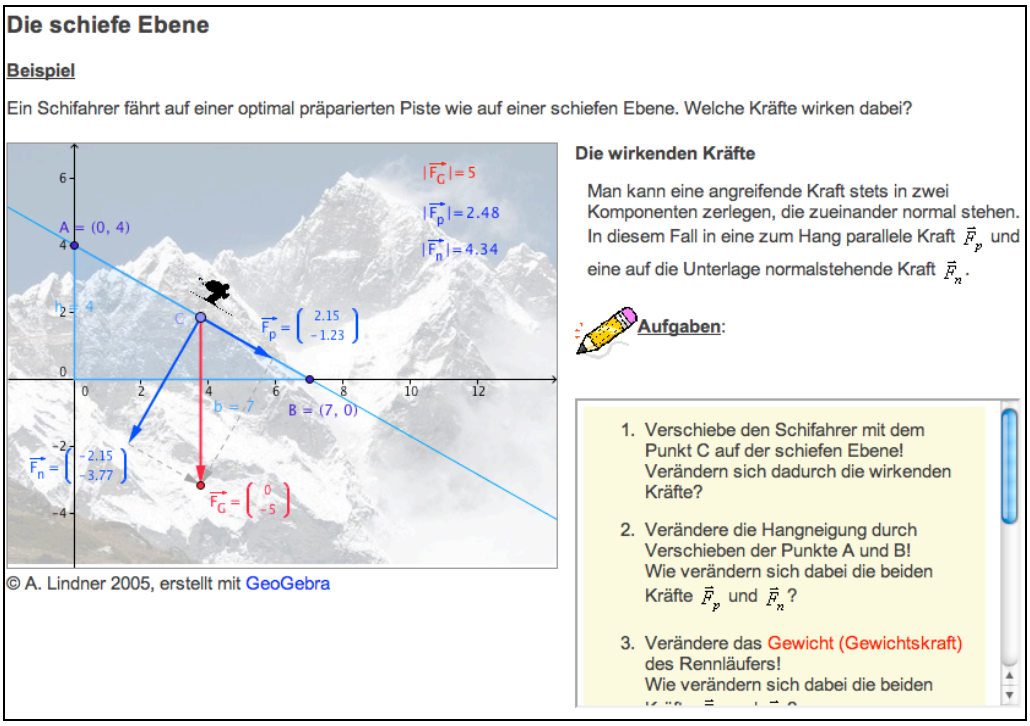



Abbildung 52: Schiefe Ebene nach der Überarbeitung

Auch bei diesem Beispiel soll ein Hintergrundbild das interaktive Applet etwas verschönern und auflockern.

Außerdem wurde festgestellt, dass das Finden einer Geradengleichung (siehe Abbildung 53) an dieser Stelle noch nicht sinnvoll ist und erst im zweiten Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene erlernt wird. Deshalb entfernte ich diese Aufgabenstellung aus dem Aufgabenfenster.

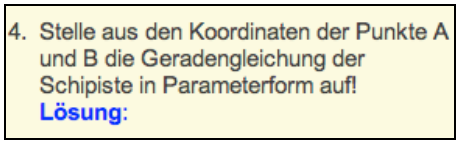



Abbildung 53: gestrichene Frage

Als abschließendes Beispiel zum Thema Kräftegleichgewicht wurde ein Beispiel einer Federwaage angeführt. Die SchülerInnen konnten bei diesem interaktiven Applet die Kräfte sowie die Lage der Kräfte beliebig verändern und die Koordinaten beobachten und dabei feststellen, dass die Summe der Kräfte $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_2}$ stets $\overrightarrow{F_3}$ ergibt.

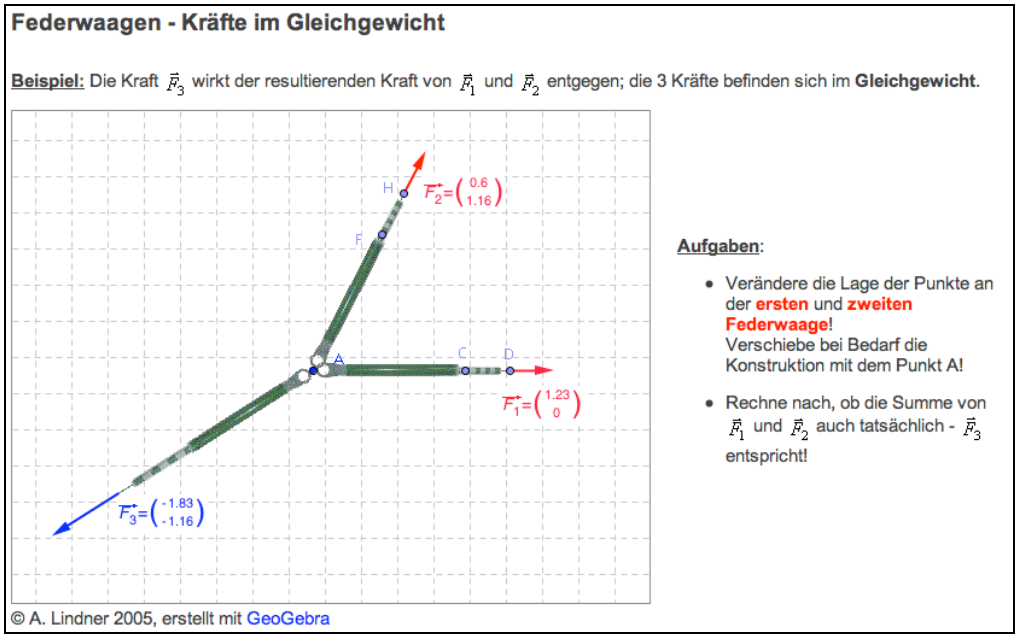



Abbildung 54: Kräfte im Gleichgewicht vor der Überarbeitung

In der internen Evaluation sowie auch in der LehrerInnenfortbildung wurde vorgeschlagen, dass die Verwendung eines Beispiels mit einem Mädchen, welches zwei Hunde an einer Leine ausführt, passender wäre und die SchülerInnen den Sachverhalt durch dieses Beispiel besser verstehen würden.

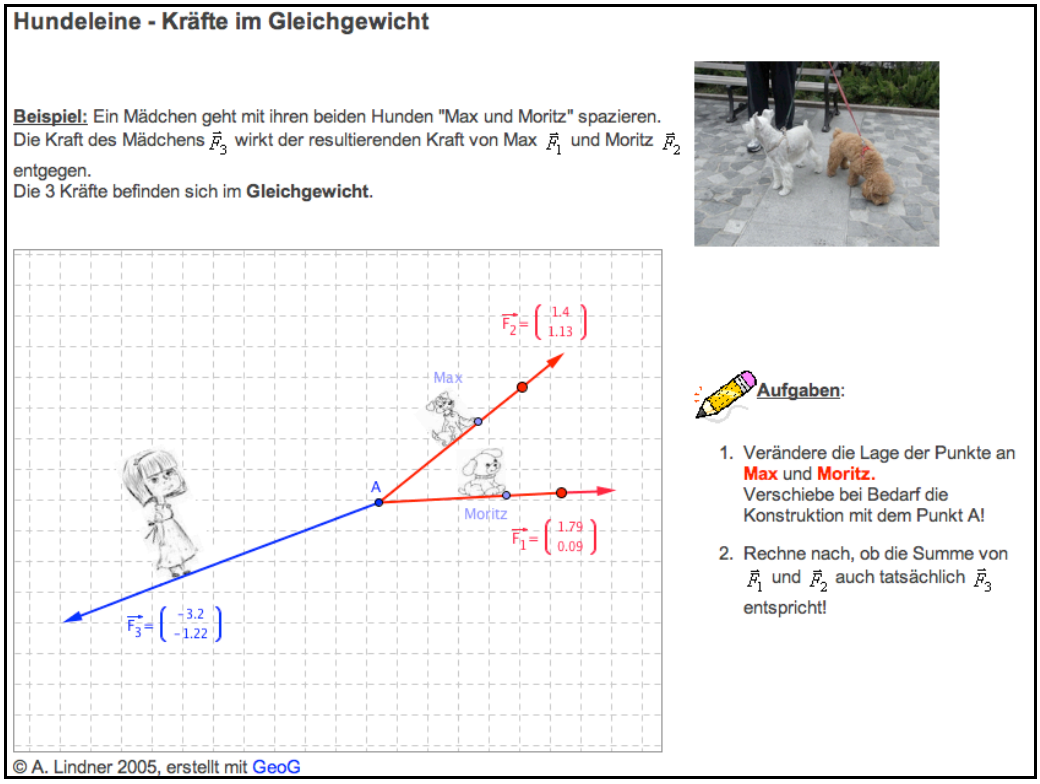



Abbildung 55: Kräfte im Gleichgewicht nach der Überarbeitung

SchülerInnen können sich meiner Meinung nach anhand des neuen Beispiels den Sachverhalt mit Sicherheit besser vorstellen als mit einer Federwaage. Wobei man auch bemerken muss, dass heutzutage eine Federwaage nicht allen SchülerInnen bekannt ist, und die Handhabung einer Federwaage auch oft gar nicht mehr in den Schulen gelehrt wird.

Daher werden im neuen Beispiel zwei Hunde Max und Moritz an einer Leine ausgeführt. Dabei entspricht die Summe der zwei Kräfte von Max und Moritz stets der Kraft des Mädchens. Die SchülerInnen sollen durch verschieben und ändern der wirkenden Kräfte diesen Sachverhalt erforschen.

### 6.6.13. Übung

Eine abschließende Seite mit Übungslinks ist der letzte Input zum Thema Vektorrechnung in der Ebene. Diese Seite wurde zur Gänze übernommen und nichts verändert. Die Links führen auf die Webseite www.realmath.de. SchülerInnen sollen diese Übungen nützen, um Gelerntes durch einfache Beispiele, wie Vektoren ablesen, zeichnen und addieren, zu vertiefen. Ein Beispiel zum Thema Vektoren ablesen von der Webseite http://www.realmath.de/Neues/Klasse7/vektor/vektorablesen.php stellt folgende Abbildung 56 dar:

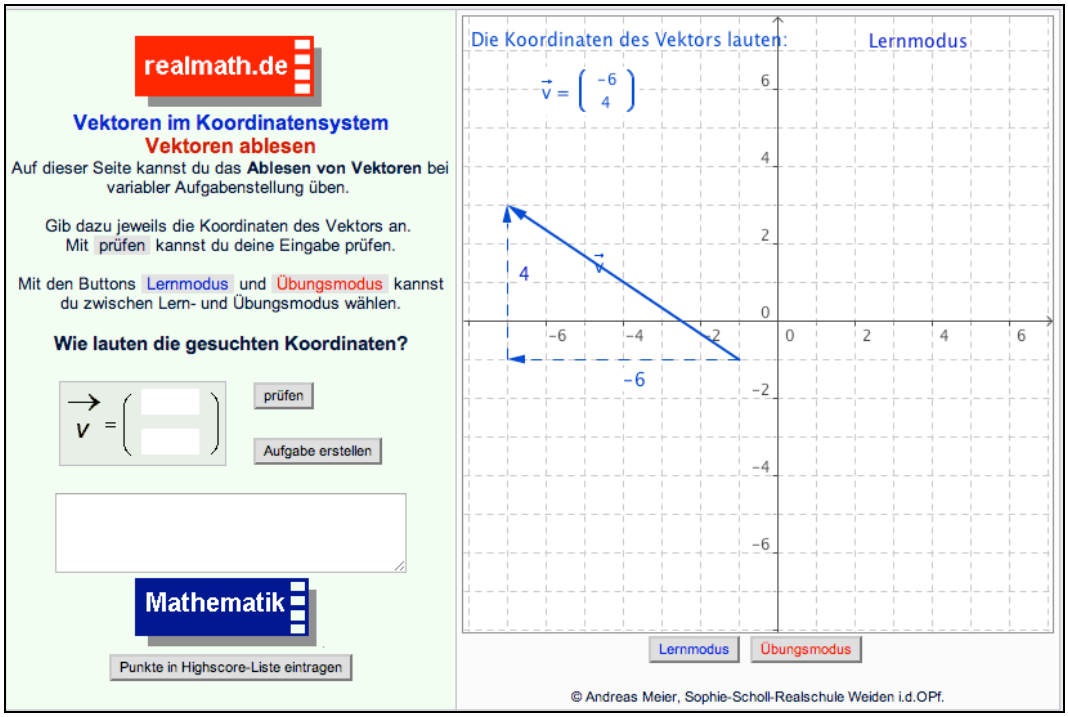



Abbildung 56: Übung Vektoren ablesen

SchülerInnen sollen bei dieser Übung die x und y Koordinate des Vektors in die dafür vorgesehenen Felder links eingeben. Durch Klicken auf „prüfen“, können SchülerInnen selbstständig ihre Antwort auf Richtigkeit überprüfen.

Im folgenden Kapitel werde ich die Überarbeitung der didaktischen Begleitmaterialien näher anführen.

# 7. Didaktische Begleitmaterialien

Grundsätzlich bestehen die didaktischen Begleitmaterialien der Lernpfade aus einem didaktischen Kommentar für LehrerInnen, einem Arbeitsplan für SchülerInnen sowie Vorschlägen für Unterrichtsorganisationen (Lernspirale, Stationenbetrieb, etc.). Da die Begleitmaterialien des Lernpfads „Vektorrechnung in der Ebene“, für LehrerInnen etwas knapp waren, sprich kein konkreter Vorschlag für einen Unterrichtseinsatz beinhaltet hat, erweiterte und überarbeitete ich diesen nach Absprache mit dem Medienvielfaltsteam.

## *7.1. Didaktischer Kommentar*

Der Didaktische Kommentar zum Lernpfad dient als Information für LehrerInnen. Dieser beinhaltet, wie bei allen anderen Lernpfaden des Medienvielfaltsprojekts, folgende Punkte, welche für den Einsatz im Unterricht wesentlich sind:

- Kurzinformation zum Lernpfad (Dauer, verwendete Medien, Autoren,..)
- Voraussetzungen (technische und fachliche Voraussetzungen für LehrerInnen und SchülerInnen)
- Auflistung der Lerninhalte und Lernziele
- *Genderaspekte*
- *Kompetenzen*
- Einsatz im Unterricht (Beschreibung der Unterrichtsvorschläge, etc)
- Kombination der Medien
- Lernmedien der SchülerInnen

Der didaktische Kommentar wurde im Zuge der Überarbeitung im 3. Medienvielfaltsprojekt um die Punkte *Genderaspekte* und *Kompetenzen* erweitert.

Wie man bereits aus dem Titel des Projekts „Medienvielfalt und Genderaspekte im Mathematikunterricht: Let’s do it!“ entnehmen kann, war die Überarbeitung der Materialien unter dem Genderaspekt ein wichtiges und wesentliches Thema. Besonders bei der Überarbeitung des Lernpfads wurde auf diesen Aspekt Wert gelegt und beispielsweise geschlechtersensitive bzw. geschlechtsneutrale Bilder und prinzipiell eine genderbewusste Sprache in allen Texten und Aufgaben verwendet. Während des Projekttreffens in Amstetten mit dem Medienvielfaltsteam wurde vereinbart, diesen Aspekt auch im didaktischen Kommentar anzuführen (siehe Anhang Didaktischer Kommentar).

Im Team wurde gemeinsam ein Dokument ausgearbeitet, in welchem die wesentlichen Punkte für die Überarbeitung der Materialien unter dem Genderaspekt zusammengefasst wurden. Aus diesem Dokument konnte jeder Teilnehmer des Projekts auf die eigene Überarbeitung angepasst, Passagen oder Teile verwenden. Speziell auf meine Überarbeitung bezogen achtete ich besonders bei der Überarbeitung des Lernpfads darauf, Beispiele so zu wählen, dass sie an Interessen beider Geschlechter anknüpfen. Ebenso verwendete ich geschlechtersensitive bzw. geschlechtsneutrale Bilder im Lernpfad. Natürlich konzentrierte ich mich auf eine genderbewusste Sprache, nicht nur im Lernpfad, sondern in Bezug auf die gesamten Materialien. Außerdem wurde darauf Wert gelegt, sich an den Lebenswelten der SchülerInnen anzulehnen (Beispiel Zug, Skifahren, Hundeleine etc.). Zusätzlich wird eine kreative Lernfortschrittüberprüfung angeboten und durch unterschiedliche, interaktive (Experimentier-) Aufgaben werden verschiedene Lerntypen angesprochen. Des Weiteren wurde bei der Bearbeitung der Unterrichtsvorschläge darauf geachtet, verschiedene Sozialformen einzusetzen. Welche Unterrichtsvorschläge ich für den Einsatz des Lernpfades ausgearbeitet habe, werde ich den anschließenden Abschnitten 7.2 und 7.3 näher erläutern.

Außerdem wurden im Hinblick auf die Zentralmatura die wesentlichen Grundkompetenzen, welche im Lernpfad angestrebt bzw. erreicht werden, diskutiert. Es wurde vereinbart, dass die Kompetenzen für LehrerInnen im didaktischen Kommentar und für SchülerInnen im Lernpfad angebracht werden. Die Grundkompetenzen, welche im Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“ der Universität Klagenfurt (Dangl et al., 2009, S.16) ausgearbeitet wurden, sind, wie bereits im Abschnitt 4.2 erwähnt, folgende:

- *„Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen können und im Kontext interpretieren können.*
- *Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) interpretieren und verständig einsetzen können.*
- *Definition der Rechenoperationen (Addition, Multiplikation mit Skalar [...]) kennen, Rechenoperationen (auch geometrisch) deuten können“*.

Außerdem wurden im Zuge eines Projekttreffens in Amstetten im Mai 2011 Handlungsdimensionen (Rechnen, Operieren, Darstellen, Modellieren, etc.), welche in den Lernpfaden hervorgerufen werden, ausgearbeitet und in Verbindung mit den oben genannten Kompetenzen gebracht .

Ein Ausschnitt aus dem überarbeiteten didaktischen Kommentar sieht wie folgt aus:

| **Rechnen, Operieren:** |
|---|
| Mit Vektoren addieren, subtrahieren und mit einem Skalar multiplizieren können (Vektoraddition, Vektorsubtraktion, Vielfaches, Parallele Vektoren). |
| Vektoren, Punkte und Pfeile aus den interaktiven Applets ablesen können und damit rechnen können (im gesamten Lernpfad). |

Tabelle 4: Ausschnitt aus dem Didaktischen Kommentar

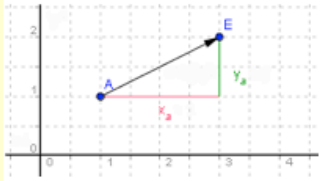
Diese Kompetenzen und Handlungsdimensionen wurden, wie bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt, auch für SchülerInnen ersichtlich gemacht, und zwar auf einer abschließenden Seite im Lernpfad:

**Kompetenzen im Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1**

Du hast nun den gesamten Lernpfad zum Thema Vektorrechnung gewissenhaft und genau durchgearbeitet.
Im folgenden sind die Kompetenzen und Handlungsdimensionen, welche im Lernpfad vorgekommen sind, aufgelistet:

***Rechnen, Operieren***

- Mit Vektoren addieren, subtrahieren und mit einem Skalar multiplizieren können (Vektoraddition, Vektorsubtraktion, Vielfaches, Parallele Vektoren).
- Vektoren, Punkte und Pfeile aus den interaktiven Applets ablesen können und damit rechnen können (im gesamten Lernpfad).

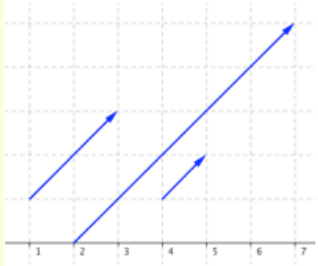



***Darstellen, Modellieren***

- Definition der Addition, Subtraktion und der Multiplikation mit einem Skalar kennen (Aufgabe der Vektoraddition, der Subtraktion, des Vielfachen).
- Alle Rechenoperationen verständig einsetzen können (in den Aufgaben der Rechenregeln sowie in den Anwendungsbeispielen).
- Vektoren geometrisch als Punkte bzw. Pfeile darstellen können (gesamter Lernpfad).

***Interpretieren/ Dokumentieren***

- Vektoraddition, Vektorsubtraktion und Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar verständig einsetzen und deuten können (Aufgabe der Addition; Aufgabe der Subtraktion (Vektortest); Aufgabe Vielfaches von Vektoren).
- Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext interpretieren können (Einleitung).
- Vektoren als Punkte bzw. Pfeile Interpretieren können (Pfeile; Rechenarten; Anwendungen).



***Argumentieren, Begründen***
Grundsätzlich hast du im gesamten Lernpfad Fragen zu interaktiven Übungen beantwortet und diese auch begründet. Besonders bei den Anwendungsbeispielen hast du mathematische Argumente genannt bzw. Begründungen in deine Projektmappe geschrieben.

Abbildung 57: Kompetenzen im Lernpfad

SchülerInnen können hinsichtlich der Zentralmatura dieser Seite die angestrebten bzw. erzielten Kompetenzen des Lernpfades entnehmen. In Klammer wurde angegeben, wo die Kompetenzen bzw. die übergeordneten Handlungsdimensionen im Lernpfad zu finden sind.

## 7.2. Die Lernspirale

Aus dem didaktischen Kommentar können Lehrende außerdem zwei Unterrichtsvorschläge für den Einsatz des Lernpfads im Unterricht entnehmen. Es wird betont, dass dies nur ein Vorschlag ist und es den Lehrenden frei steht, auf welche Art und Weise der Lernpfad eingesetzt wird. Im Zuge meiner Überarbeitung der didaktischen Begleitmaterialien fertigte ich eine Lernspirale (siehe Abschnitt 2.4.2) und einen weiteren Unterrichtsvorschlag an.

Der Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene eignet sich sehr gut für eine Lernspirale, da man den Lernpfad sehr einfach in die drei Phasen und die damit verbundenen Stufen (siehe Tabelle 5) nach Klippert (2004, S. 66) unterteilen kann:

| Phase | Stufe | Lernpfad |
|---|---|---|
| Sensibilisierungsphase | Vorwissen/Voreinstellung aktivieren | einführendes Beispiel durch einen Zug |
| Informationsphase | Neue Kenntnisse und Verfahrensweisen erarbeiten | Pfeile, Länge eines Pfeils, Schiebung,..., Parallele Vektoren |
| Transferphase | auf komplexe Anwendungs- und Transferaufgaben übertragen | Anwendungsbeispiele |

Tabelle 5: Stufen einer Lernspirale

Für den Einsatz der Lernspirale sind sieben Unterrichtseinheiten empfohlen. Dabei ist die letzte Einheit für die Bearbeitung der Anwendungsbeispiele vorgesehen, welche in Form eines Projekts von den SchülerInnen erarbeitet werden. Das selbstständige Erarbeiten der Anwendungen aus der Praxis und ein anschließendes Präsentieren soll das Arbeiten mit dem Lernpfad abschließen. Die gesamte Lernspirale ist im Anhang 10.3 zu finden.

## 7.3. Ein weiterer Unterrichtsvorschlag

Da bei jedem Lernpfad mindestens zwei Unterrichtsorganisationen angeboten werden sollten, arbeitete ich zusätzlich zur Lernspirale einen weiteren Unterrichtsvorschlag (siehe Anhang 10.5) aus. Dieser Unterrichtsvorschlag ist abwechselnd für eine Einzel- und Partnerarbeit vorgesehen. Wie auch bei der Lernspirale ist es wichtig, dass jede/r

SchülerIn für das Arbeiten mit dem Lernpfad einen eigenen Computer zur Verfügung hat. Sollte dies nicht möglich sein, kann dieser Unterrichtsentwurf auch als Partnerarbeit mit wenigen Computern umgesetzt werden. Das Arbeiten mit dem Lernpfad endet mit einem Projekt. SchülerInnen werden in Gruppen eingeteilt. Jede Gruppe, welche aus vier bis fünf SchülerInnen besteht, hat die Ausarbeitung eines Anwendungsbeispiels zur Aufgabe. Diese Ausarbeitung der vier Anwendungsbeispiele wird abschließend der gesamten Klasse präsentiert.

Den Ablauf zu den beiden Unterrichtsentwürfen können SchülerInnen einem Arbeitsplan entnehmen, welcher Teil der Projektmappe ist und den ich nun näher erklären werde.

## *7.4. Die Projektmappe*

Ursprünglich war vorgesehen, dass SchülerInnen eine sogenannte Projektmappe händisch oder am Computer erstellen, wobei diese Projektmappe Teil der Beurteilung ist. Für mich war jedoch aus den ursprünglichen Materialien nicht ersichtlich, wie eine solche Projektmappe genauer aussehen sollte. Deshalb überlegte ich mir, wie man eine derartige Mappe gestalten könnte.

Grundsätzlich sollte meiner Meinung nach eine Projektmappe dazu dienen, Unterlagen zum Thema Vektorrechnung in der Ebene auch auf Papier zu haben. Diese Unterlagen sollten, so gut wie möglich, strukturiert und genau geführt werden. Außerdem soll die Projektmappe sowohl für SchülerInnen, als auch für LehrerInnen, einen gewissen Einblick über bereits Gelerntes und Erarbeitetes geben und die Beurteilung durch die Lehrenden vereinfachen. Die Projektmappe soll darüber hinaus auch eine Möglichkeit zum „offline“ arbeiten sein, da Hausübungen, Mitschriften und Arbeitsblätter ebenso Teil der Projektmappe sein sollen.

Die Projektmappe beinhaltet folgende Blätter:

- Deckblatt
- Bedienungsanleitung
- Arbeitsplan
- Hausübungsbeispiele
- Mappeneinträge (Mitschrift und Lernprotokoll)
- Arbeitsblätter
- Checkliste

Das „*Deckblatt*“ (siehe Anhang 10.6.1), welches mit Name und Klasse von jedem/r SchülerIn versehen werden muss, soll die erste Seite dieser Projektmappe sein. Außerdem sollte die Projektmappe eine „*Bedienungsanleitung*“ (siehe Anhang 10.6.2) beinhalten. Diese Bedienungsanleitung soll für SchülerInnen quasi eine Checkliste sein, wo der Inhalt der Mappe genau aufgelistet wird und die Ziele des Lernpfades beschrieben werden. Ein „*Arbeitsplan*“ (siehe Anhang 10.4 und 10.5) soll den SchülerInnen die wichtigsten Informationen zum Arbeiten mit dem Lernpfad geben. Da ich zwei unterschiedliche Unterrichtsvorschläge ausgearbeitete habe, gibt es dazu auch zwei verschiedene Arbeitspläne.

**Arbeitsplan zur Lernspirale:**
***Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1***

Dieser Arbeitsplan hilft dir, möglichst genau und strukturiert mit dem Lernpfad zu arbeiten. Sobald du einen Arbeitsauftrag erledigt hast, kannst du diesen in der rechten Spalte „Erledigt“ abhaken. Achte aber drauf, dass du jeden Lernschritt genau in deiner Mappe dokumentierst! Du sollst ein sogenanntes Lernprotokoll führen. Schreibe immer eine Überschrift, die Angabe in Kurzform und deine Antwort auf. Fertige wenn nötig eine passende Skizze an, außerdem sollst du notieren, wann du Probleme hattest, was also schwierig aber auch einfach war!

| Stunde | Thema | Arbeitsauftrag | Sozial-form | Zeit (min) | HÜ | Abgabe Hü | Erledigt ☑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A 00 Einführung | Das einleitende Beispiel wird erarbeitet, Ergebnisse mit einem anderen Paar vergleichen. | PA | 15' | Beispiele | Datum | ☐ |
| | A 01 Pfeile | Koordinaten von Pfeilen: Ergebnisse werden mit PartnerIn besprochen | EA | 13' | | | ☐ |
| | | Pfeile und Vektoren: Ergebnisse mit einem anderen Paar sowie mit der Zusammenfassung vergleichen (nächste Seite), wenn nötig ergänzen. | PA | 20' | | | ☐ |
| | A 01 Pfeile (*Fortsetzung*) | Verschiedene Pfeile- derselbe Vektor: Ergebnisse mit PartnerIn vergleichen. | EA | 15' | | | ☐ |

Abbildung 58: Ausschnitt aus dem Arbeitsplan (Lernspirale)

Dieser Arbeitsplan besteht aus einem Raster, in welchen die Makrospirale aus der Lernspirale eingetragen wurde. SchülerInnen können daraus den Arbeitsauftrag, die Sozialform (Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit), die dafür vorgesehene Zeit, die Hausübungsbeispiele bzw. das Abgabedatum dieser Hausübungsbeispiele entnehmen. Haben die SchülerInnen, den für die jeweilige Stunde vorgesehenen Ablauf erledigt, sowie die Hausübung zeitgerecht abgegeben, so können sie in der letzten Spalte „Erledigt“ ein „Hackerl“ setzen.

Die Auswahl der Hausübungsbeispiele wird den Lehrenden überlassen. Ursprünglich war geplant, Beispielnummern aus einem gängigen Mathematikbuch anzugeben. Da aber nicht jede Schule dasselbe Buch verwenden, entschied ich mich dafür, keine konkreten Angaben zu den Beispielen zu machen und diese Entscheidung den Lehrenden zu

überlassen. Dadurch können Lehrende, je nach Wunsch verschiedene Beispiel zur Vertiefung als Hausübung aufgeben.

Da SchülerInnen stets aufgefordert sind, Einträge in ihre Mappe zu machen, ist es wichtig diese Mappeneinträge gut zu strukturieren.

Die letzte „vorgedruckte“ von mir entwickelte Seite der Projektmappe ist eine „*Checkliste*“ (siehe Anhang). SchülerInnen können durch einfaches Abhaken kontrollieren, welches Wissen bzw. welche Kompetenzen erworben worden sind. Ich wollte den SchülerInnen diese Kompetenzen nicht bloß auf einer Seite im Lernpfad vorstellen, sondern ihnen auch die Möglichkeiten geben, sich selbst einzuschätzen. Diese Checkliste entstand in Anlehnung an die Kompetenzen der Universität Klagenfurt (siehe Abschnitt 4.2), sowie an das Zusatzheft des Schulbuchs Dimensionen Mathematik 5 (vgl. Bleier et al., 2009, S. 207). Die Kompetenzen-Checkliste soll nur für SchülerInnen zur Kontrolle dienen und nicht in die Benotung miteinbezogen werden.

Die Mappeneinträge zum Lernpfad bestehen aus Merksätzen, Lösungen zu Aufgaben, Vermutungen sowie Skizzen. Außerdem sollen SchülerInnen ihren eigenen Lernfortschritt dokumentieren, was bedeutet, dass sie ein Lernprotokoll führen sollen. Als erstes werden also die inhaltlichen Einträge zu den einzelnen Themen aus dem Lernpfad aufgezeichnet. Hier sollen SchülerInnen versuchen, selbstständig Gemachtes bzw. Gelerntes gut strukturiert auf Papier zu bringen. Anschließend sollen SchülerInnen versuchen, sich mit dem Lernstoff und dem eigenen Lernverhalten auseinander zu setzen.

Grundsätzlich versteht man unter einem Lernprotokoll die Auseinandersetzung mit dem Lernstoff und den damit verbundenen Lernverhalten. Im Lernprotokoll werden diese Lernerfahrungen schriftlich festgehalten. Entsprechend der Bedeutung des Lernprotokolls erkennt man, dass diese Reflexion auf zwei verschiedenen Ebenen stattfindet. Auf der *kognitiven Ebene*, setzt sich der/die Lernende mit dem Inhalt auseinander und verarbeitet diese. Auf der *metakognitiven Ebene* versucht der/die SchülerIn sein eigenes Lernen zum Thema des Lernprotokolls zu machen. SchülerInnen sollen stets notieren, wo was gelernt wurde, was einfach bzw. schwierig war, ob Unterstützung durch die Lehrkraft notwendig ist und wie das eigene Lernverhalten optimaler gestaltet werden kann (vgl. Berthold et al. zit. nach Hauser, 2003).

Ich finde, dass das Führen eines Lernprotokolls gerade beim selbstständigen Erlernen eines mathematischen Inhalts, wie bei diesem Lernpfad, nicht nur für SchülerInnen sondern auch für LehrerInnen sehr wichtig ist. LehrerInnen können daraus das unterschiedliche Lernverhalten von SchülerInnen entnehmen und somit individuell auf dieses eingehen.

# 8. Wissenstest

Für die Überarbeitung der Lernpfade aus dem ersten Medienvielfaltsprojekt war die Erstellung eines Wissenstests ebenfalls ein wesentlicher Punkt. Für die Lernpfade aus dem zweiten Projekt wurde bereits je ein Wissenstest erstellt. Mit den Wissenstests versucht man eine ganzheitliche Beurteilung der Lernmaterialien und Lernmethoden zu schaffen, wobei neben dieser Qualitätskontrolle auch die Verifizierung des Leistungszuwachses möglich ist (vgl. Leitgeb, 2009, S. 70). Außerdem stellen solche Online-Wissenstests eine Übungsmöglichkeit für SchülerInnen dar.

Die Aufgaben des Wissenstests für den Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene, habe ich unter besonderer Berücksichtigung der Kompetenzen für die zentrale schriftliche Reifeprüfung erstellt (siehe Abschnitt 4.2).

Ein Ausschnitt aus den Aufgaben ist die folgende Abbildung:

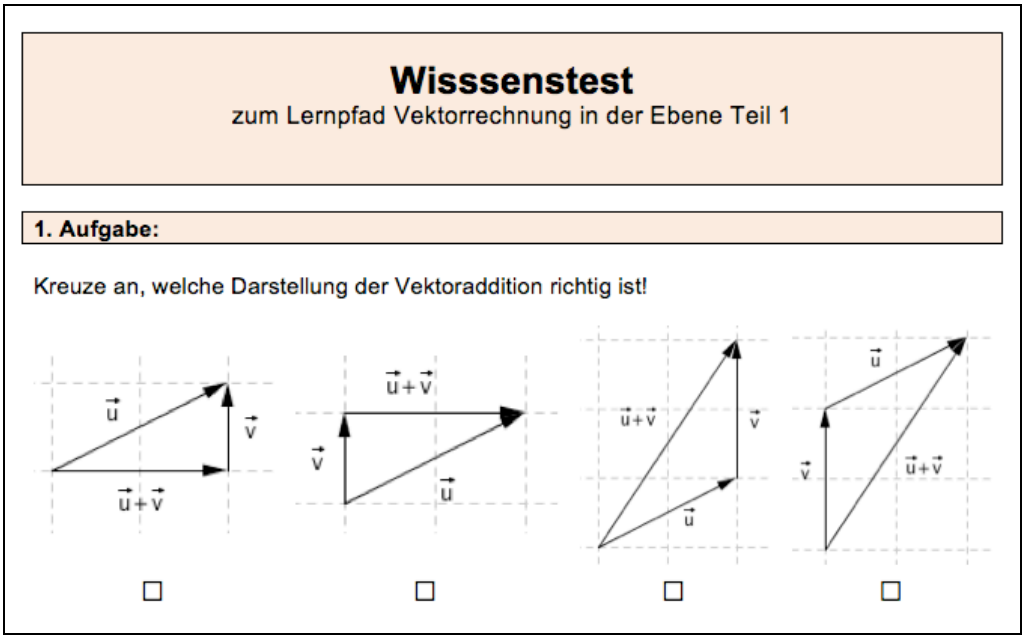



Abbildung 59: Aufgabe 1 aus dem Wissenstest

SchülerInnen sollen bei dieser Aufgabe die richtigen Darstellungen für die Vektoraddition finden. Insgesamt wurden vier Aufgaben (siehe Anhang 10.7) erstellt.

Bei einer weiteren Aufgabe im Test (siehe Abbildung 60) müssen SchülerInnen durch setzen eines „Kreuzerl“ die richtigen Aussagen erkennen. Diese Aufgabe entnahm ich aus dem Projektbericht für die zentrale schriftliche Reifeprüfung (Dangl et al., 2009, S. 19).

**4. Aufgabe**

Kreuze an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind!

| Richtig | Falsch | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | Es gibt einen Punkt und einen Pfeil der Ebene, denen derselbe Vektor zugeordnet wird. |
| ☐ | ☐ | Es gibt unendlich viele Vektoren denen derselbe Pfeil zugeordnet wird. |
| ☐ | ☐ | Jedem Punkt der Ebene entspricht genau ein Vektor. |
| ☐ | ☐ | Alle gleich langen Pfeile bilden einen Vektor. |
| ☐ | ☐ | Alle gleich langen, parallelen und gleich orientierten Pfeile gehören zum selben Vektor. |

Abbildung 60: Aufgabe 4 aus dem Wissenstest

Die technische Umsetzung des Wissenstests erfolgte zur Zeit der Erstellung dieser Diplomarbeit noch nicht. Fest steht aber, dass die Wissenstests im Rahmen der Evaluation der überarbeiteten Lernpfade im Schuljahr 2011/12 eingesetzt werden. Nachdem die SchülerInnen die Lernpfade durchgearbeitet haben, werden sie von den LehrerInnen aufgefordert die Wissenstests zu machen.

# 9. Zusammenfassung und Ausblick

Nach dem doch sehr intensiven Prozess des Recherchierens und Zusammenführens wichtiger Informationen im Zusammenhang mit dem durchaus umfangreichen Thema „Neue Medien im Mathematikunterricht“ und der Überarbeitung des Lernpfads „Vektorrechnung in der Ebene“ haben sich für mich viele wichtige Erkenntnisse ergeben, die mir vor dem Verfassen der Arbeit nicht bewusst waren und auch mein zukünftiges Lehrerdasein mit großer Sicherheit prägen werden.

Die Möglichkeiten, die die technologischen Entwicklungen für den Unterricht mitbringen, sollten von praktizierenden LehrerInnen erkannt und für die Gestaltung des Unterrichts berücksichtigt werden. Sie sollen die neuen Medien als eine Chance sehen und die zahlreichen Angebote von Lehrmaterialien, wie beispielsweise Lernpfade annehmen. Sie sollen aber auch Methoden wie EVA, SOL und offenes Lernen im Unterricht willkommen heißen.

So wie beispielsweise die Fotografie im 19. Jahrhundert die traditionelle Bleistiftzeichnung abgelöst hat, so finden heute die durch die neuen Medien ergänzten Unterrichtsmethoden Einzug in den Unterrichtsalltag und ersetzen mehr und mehr die herkömmlichen Unterrichtsprinzipien. Vielleicht kann die vorliegende Arbeit manchen LehrerInnen helfen, ihr Selbstvertrauen im Umgang mit neuen Medien, speziell mit Lernpfaden, zu stärken und die damit verbundenen Unterrichtsmethoden im Unterricht einzusetzen.

Die Vermittlung von Kompetenzen auf fachlicher aber auch technischer Ebene ist eine grundlegende Aufgabe der LehrerInnen. Die Kompetenzen in fachlicher Hinsicht wurden durch die Bildungsstandards konkretisiert. Das Erreichen dieser Kompetenzen kann durch eine intensive Auseinandersetzung mit einem Thema unter Verwendung eines Lernpfads gefördert und unterstützt werden. Das eigenverantwortliche, eigenständige und explorative Arbeiten mit einem Lernpfad sorgt für einen nachhaltigen Kompetenz- und Wissenserwerb.

Abschließend möchte ich betonen, dass bei der Herangehensweise an komplexe mathematische Themen durch den Einsatz neuer Medien, insbesondere durch Lernpfade, die Motivation und Lernfreude der SchülerInnen aufrecht erhalten bleibt und sie daher die Möglichkeit haben, Mathematik selbst erforschen zu können.

Der im Anschluss an den Lernpfad durchgeführte Wissenstest ist einerseits Feedback für das Medienvielfaltsteam und andererseits zeigt dieser den SchülerInnen auf, welche Kompetenzen sie nach der Bearbeitung des Lernpfades erworben haben sollen. Außerdem werden sich nach der Auswertung der Ergebnisse aus den Wissenstest einige Schlüsse hinsichtlich dem Lernzuwachs der SchülerInnen ziehen lassen.

Obwohl alle überarbeiteten Lernpfade sich noch in der Testphase befinden, bin ich zuversichtlich, dass die Rückmeldungen der LehrerInnen sowie SchülerInnen positiv ausfallen werden. Selbstverständlich schließt das zukünftige Verbesserungsvorschläge für den speziell von mir überarbeiteten Lernpfad nicht aus.

Die intensive Auseinandersetzung und die gewonnenen Erkenntnisse im Zusammenhang mit der Thematik „neue Medien im Mathematikunterricht“ bestärken mich darin, die neuen Medien in meinen eigenen Unterricht einzubauen. Ich sehe darin großes Potenzial, Wissen effizient und nachhaltig zu vermitteln.

# 10. Anhang

## *10.1. Fragebogen für LehrerInnen zum Lernpfad Vektorrechnung*

**Name:**

**E-Mail Adresse:**

---

1. Wurden Ihrer Meinung nach alle mathematischen Begriffe korrekt und für SchülerInnen verständlich erklärt, oder würden Sie die eine oder andere Definition, Begriffsklärung, etc. ändern?

2. Fehlt Ihrer Meinung nach in diesem Lernpfad, zur Einführung in die Vektorrechnung, fachlich gesehen etwas Wichtiges?

3. Gibt es Ihrer Meinung nach Beispiele, die Sie nicht passend für die Einführung in die Vektorrechnung finden? Wenn ja, welche? Hätten Sie einen Vorschlag für ein geeigneteres Beispiel?

4. Finden Sie, dass alle Aufgabenstellungen klar bzw. ausführlich genug formuliert wurden?

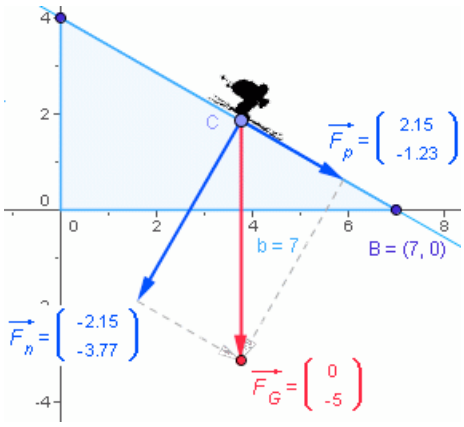
5. Halten Sie die vorhandenen Lösungslinks für ausreichend? Würden Sie es gut finden, wenn auch bei theoretischen Fragen bzw. Anweisungen für Hefteinträge Lösungen bzw Mustersätze zur Verfügung stehen würden?

6. Finden Sie, dass die verwendeten Beispiele Buben und Mädchen gleichermaßen ansprechen? Wenn nein, haben sie konkrete Ideen für andere Beispiele?

7. Gibt es Teile in diesem Lernpfad, die Ihnen besonders gut gefallen, die Sie also unverändert lassen würden?
Oder gibt es Teile in diesem Lernpfad, die Ihnen nicht gefallen? Würden Sie diese verändern, wenn ja wie? Oder würden Sie Teile vollkommen weglassen?

8. Wie gefällt Ihnen der Lernpfad generell? Würden Sie diesen Lernpfad oder Teile daraus in Ihrer Klasse durchführen?

## *10.2. Didaktischer Kommentar*




### Didaktischer Kommentar: Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1

Dieser Lernpfad bietet einen Einstieg in die Grundlagen der Vektorrechnung. Durch interaktive Applets, Übungen und Aufgaben mit Lösungen sollen die SchülerInnen die Darstellung von Vektoren und das Rechnen mit diesen erlernen. In mehreren Anwendungsbeispielen aus der Physik sollen die Notwendigkeit und die Einsatzmöglichkeiten für das Rechnen mit Vektoren erläutert werden, wobei auf eine Kombination von Lernen am Computer und mit Heft bzw. Mappe Wert gelegt wird. Eine Anleitung zum Arbeiten mit Vektoren in GeoGebra rundet das Angebot ab.

| Kurzinformation | |
|---|---|
| Schulstufe | 9. Schulstufe |
| Dauer | 6 Stunden |
| Unterrichtsfächer | Mathematik |
| Verwendete Medien | Java-Applets, Dynamische Geometrie Software (DGS) |
| Technische Voraussetzungen | Java |
| Autoren | Andreas Lindner, Markus Hohenwarter, Thomas Himmelbauer, Anita Dorfmayr, Ramona Weilhartner |

### *Voraussetzungen*

- technische Voraussetzungen: Java (kostenlos von www.java.com), Internet, eventuell GeoGebra (kostenlos von www.geogebra.at)
- technisches Vorwissen: Elementarer Umgang mit dem Computer, Verwendung von dynamischen Applets
- fachliche Voraussetzungen: Vektorrechnung im $R^2$ auf elementarem Niveau
- Vorwissen der SchülerInnen: ablesen von Koordinaten, zeichnen von Punkten, Grundrechnungsarten, Umfang Vielecke (Dreieck, Parallelogramm)

### *Lerninhalte und Lernziele*

| **Lerninhalt** | **Lernziel** |
|---|---|
| **Einleitung**<br>Weg und Geschwindigkeit eines Zuges | Die Notwendigkeit für die Einführung von gerichteten Größen verstehen. |
| **Pfeile**<br>Pfeile Länge eines Pfeils<br>Pfeile / Vektoren | Die koordinatenweise Schreibweise für Vektoren verwenden können. Die Unterscheidung zwischen Pfeil und Vektor wiedergeben können. Die Länge eines Pfeiles berechnen können. |
| **Schiebung** | Vektoren als Mittel zur Schiebung einsetzen können. |
| **Rechenarten**<br>Vektoraddition<br>Gegenvektor<br>Vektorsubtraktion<br>Rechenregeln | Die grundlegenden Rechenarten Addition und Subtraktion rechnerisch und graphisch beherrschen.<br>Den Gegenvektor zu einem gegebenen Vektor rechnerisch und graphisch bestimmen können. |
| **Anwendungen**<br>Einleitung<br>Beleuchtung<br>Laterne<br>Schiefe Ebene<br>Kräftegleichgewicht | Vektoren in Komponenten zerlegen können und die Einsatzmöglichkeiten in der Technik verstehen. |
| **Vielfaches** | Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar rechnerisch nachvollziehen und graphisch interpretieren können. |
| **Parallele Vektoren** | Parallele Vektoren rechnerisch nachvollziehen und graphisch interpretieren können. |
| **Übungen**<br>Vektoren ablesen<br>Vektor zeichnen<br>Vektoren addieren<br>Kommutativgesetz | Durch die Übungen die Rechensicherheit im Umgang mit Vektoren erhöhen. |
| **Anleitungen** | Die Anleitungen verwenden und effizient einsetzen können |

## *Genderaspekte*

In folgenden Bereichen wurden Genderaspekte berücksichtigt:
Es werden/es wird

**Inhalt und Material**

- an den Interessen beider Geschlechter angeknüpft
- geschlechtersensitive bzw. geschlechtsneutrale Bilder verwendet

**Genderbewusste Sprache**

- eine genderbewusste Sprache in allen Texten und Aufgaben verwendet
- in der Sprache und beim Sprechen beide Geschlechter sichtbar gemacht und / oder geschlechtsneutrale Begriffe verwendet
- weibliche und männliche und / oder geschlechtsneutrale Sprachformen verwendet

**Genderansätze in den Lernmaterialien**

- sind an den Lebenswelten von SchülerInnen angelehnt (Zug, Skifahren, Hundeleine etc.)
- interaktive (Experimentier-)Anteile eingesetzt
- kreative Lernfortschrittsüberprüfungen angeboten
- verschiedene Lerntypen angesprochen
- verschiedene Sozialformen eingesetzt
- die mathematischen Inhalte schrittweise exaktifiziert

## *Kompetenzen*

Folgende Handlungsdimensionen kommen im Lernpfad vor, dabei ist in Klammer angegeben, wo die Kompetenzen im Lernpfad zu finden sind:

**Rechnen, Operieren**

- Mit Vektoren addieren, subtrahieren und mit einem Skalar multiplizieren können (Vektoraddition, Vektorsubtraktion, Vielfaches, Parallele Vektoren).
- Vektoren, Punkte und Pfeile aus den interaktiven Applets ablesen können und damit rechnen können (im gesamten Lernpfad).

**Darstellen, Modellieren**

- Definition der Addition, Subtraktion und der Multiplikation mit einem Skalar kennen (Aufgabe der Vektoraddition, der Subtraktion, des Vielfachen).
- Alle Rechenoperationen verständig einsetzen können (in den Aufgaben der Rechenregeln sowie in den Anwendungsbeispielen).
- Vektoren geometrisch, als Punkte bzw. Pfeile darstellen können (gesamter Lernpfad).

**Interpretieren/ Dokumentieren**

- Vektoraddition, Vektorsubtraktion und Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar verständig einsetzen und deuten können (Aufgabe der Addition); Aufgabe der Subtraktion – Aufgabe (Vektortest); Aufgabe Vielfaches von Vektoren)
- Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext interpretieren können

(Einleitung)
- Vektoren als Punkte bzw. Pfeile interpretieren können (Pfeile; Rechenarten; Anwendungen)

**Argumentieren, Begründen**
Grundsätzlich sind SchülerInnen dazu aufgefordert, im gesamten Lernpfad Fragen zu interaktiven Übungen zu beantworten und ihre Antworten zu begründen. Besonders bei den Anwendungsbeispielen müssen SchülerInnen mathematische Argumente nennen können, bzw. Begründungen schriftlich festhalten.

## *Einsatz im Unterricht*

Bei den Materialien zu diesem Lernpfad finden Sie zwei ausgearbeitete Vorschläge zum Einsatz des Lernpfades im Unterricht. Für diese beiden Unterrichtsvorschläge ist die Führung einer Projektmappe vorgesehen. Diese Projektmappe besteht aus einem Deckblatt, einer Bedienungsanleitung, einem Arbeitsplan, Liste für Hausübungsbeispiele, einem Arbeitsblatt, sowie einer Checkliste. Die Bedienungsanleitung für SchülerInnen beinhaltet eine Auflistung aller notwendigen Dokumente für die Projektmappe und eine Formulierung der Lernziele. Der Arbeitsplan gibt den SchülerInnen genaue Anweisung zum Arbeiten mit dem Lernpfad. Die Liste für Hausübungsbeispiele besteht lediglich aus einem Raster. Sie können somit selbst entscheiden welche Beispiele Sie (als Vertiefung) den SchülerInnen aufgeben wollen. Das Arbeitsblatt zum Lernpfad beinhaltet alle wichtigen Informationen, welche SchülerInnen nach dem Arbeiten mit dem Lernpfad besitzen sollen. Die Lösung dazu befindet sich am Ende der Datei Info_Lehrer.doc. Die Checkliste soll, im Hinblick auf die Reifeprüfung, für SchülerInnen eine abschließende Kontrolle sein. Sie können damit nochmal das erworbene Wissen kontrollieren.

**1. Unterrichtsvorschlag:**
Dieser Unterrichtsvorschlag besteht aus einer Lernspirale nach Klippert. Der Inhalt des Lernpfads wurde in einzelne Arbeitsinseln aufgeteilt, und wird durch ein sehr abwechslungsreiches Arbeiten zu zweit oder alleine erarbeitet. Die Datei Info_Schueler.pdf beinhaltet alle notwendigen Dateien für Ihre SchülerInnen.

**2. Unterrichtsvorschlag:**
Dieser Unterrichtsvorschlag beinhaltet ebenfalls ein sehr abwechslungsreiches Arbeiten zu zweit oder alleine. Dieser Vorschlag unterscheidet sich zum ersten Unterrichtsentwurf darin, dass die Aufteilung der Einzel- und Partnerarbeit etwas anders erfolgte. Außerdem ist abschließend ein Projekt vorgesehen, bei welchen SchülerInnen die Anwendungsbeispiele aus der Physik selbstständig ausarbeiten sollen. Die Datei Info_Schueler.doc beinhaltet, wie beim ersten Vorschlag, alle notwendigen Dateien für SchülerInnen.

Selbstverständlich steht es Ihnen frei, diesen Vorschlag Ihren eigenen Bedürfnissen und Vorlieben anzupassen. Beim Einsatz dieses Lernpfades stehen Sie als Lehrperson Ihren SchülerInnen als Moderator mit Hilfestellungen zur Seite und organisieren den Ablauf (z.B. Wechsel der Sozialform, Gruppeneinteilung, ...).
Für den Einsatz des Lernpfades im Unterricht sind verschiedene Szenarien denkbar:

1. Einzelarbeit an einem Computer
2. Partnerarbeit an einem Computer

3. Stationenbetrieb mit mehreren Computern, bei denen jede Station aus einem Teil des Lernpfades besteht

Es ist nicht notwendig, dass der Lernpfad in aufeinanderfolgenden Stunden bearbeitet wird. In der Regel wird dies von der Verfügbarkeit von Computern abhängen. Inhaltlich steht es Ihnen frei, bestimmte Teile aus dem Lernpfad auszuwählen, die Reihenfolge ihrer Behandlung im Unterricht zu verändern oder Ihren SchülerInnen nur bestimmte Übungen bearbeiten zu lassen. In diesem Lernpfad wechseln sich Arbeiten am Computer und im Heft ab. Daher sollte auf den Tischen neben den Computern genügend Platz zum Schreiben vorhanden sein.

### *Kombination der Medien*

In dem vorliegenden Lernpfad wird versucht, durch interaktive Applets das erforschende Lernen der SchülerInnen zu fördern. Die neu gewonnenen Erkenntnisse sollen im Anschluss daran durch händisches Rechnen vertieft und gefestigt werden. Viele der Aufgabenstellungen sind eine Verflechtung von Arbeiten am Computer und Rechnen mit Papier und Bleistift, wobei die Lösungen der Übungen entweder aus der Konstruktion ersichtlich sind oder an geeigneter Stelle angeführt werden.

Besonders wichtig für die Ergebnissicherung sind neben der Arbeit am Computer daher auch Diskussionen in Kleingruppen und mit der ganzen Klasse.

### *Lernmedien der SchülerInnen*

Die SchülerInnen arbeiten mit diesem Lernpfad nicht nur am Computer. Sie sollen auch Definitionen und Ergebnisse von Übungen im Heft festhalten - auf diese Art kann ein Lerntagebuch zur Vektorrechnung entstehen.

### *Leistungsbeurteilung*

Die Ergebnisse der SchülerInnen sollten als Basis für Diskussionen und Zusammenfassungen in Gruppen oder der ganzen Klasse verwendet werden, wobei die Mitarbeit der einzelnen SchülerInnen bewertet werden kann. Weitere Möglichkeiten zur Leistungsbeurteilung sind das Absammeln der Hefte, entsprechende Schularbeitsbeispiele, Hausübungsbeispiele in einer Lernplattform oder auch eine schriftliche Überprüfung der Mitarbeit am Ende des Lernpfades.

Die Leistungsbeurteilung hängt natürlich sehr stark davon ab, wie Sie den Lernpfad im Unterricht einsetzen. So wird sich die Beurteilung prinzipiell beim Einsatz einer Lernplattform auf andere Kriterien stützen müssen als beim Einsatz des Lernpfades zur Wiederholung und Festigung eines schon großteils bekannten Lerninhalts.

## *10.3. Lernspirale*

**Lernspirale zum Thema**
**Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1**

**5. Klasse**

**von**
**Ramona Weilhartner**

**zum Lernpfad von**
**Markus Hohenwarter, Andreas Lindner, Thomas Himmelbauer und Anita Dorfmayr**
**Überarbeitet von Ramona Weilhartner**

| **Themenbereich/Inhalte:** | |
|---|---|
| Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1 | |
| **Fachliche** | |
| **Voraussetzungen:** | **Ziele:** |
| • Ablesen von Koordinaten<br>• Zeichnen von Punkten<br>• Grundrechnungsarten<br>• Umfang Vielecke (Dreieck, Parallelogramm) | • Die Verwendung von Vektoren in der Praxis kennen und Beispiele nennen können.<br>• Den Unterschied zwischen Pfeil und Vektor deuten und erklären können.<br>• Vektoren mit Hilfe von Koordinaten angeben können.<br>• Vektoren addieren, subtrahieren und diese auch definieren können.<br>• Vielfache von Vektoren und parallelen Vektoren berechnen und definieren können.<br>• Die Länge eines Vektors berechnen können. |

| Methodische | |
|---|---|
| **Voraussetzungen:** | **Ziele:** |
| • Informationen selbstständig schriftlich festhalten können<br>• mit Partner und in Gruppe arbeiten können<br>• Methoden zur Partner- und Gruppenfindung kennen<br>• Ergebnisse präsentieren können | • mathematische Inhalte selbstständig erarbeiten können<br>• über mathematische Inhalte sprechen können<br>• wichtige Informationen filtern und schriftlich festhalten können<br>• Eigenverantwortung beim Lernprozess stärken<br>• elektronische Lernhilfen sinnvoll nutzen können |

| Technische | |
|---|---|
| **Voraussetzungen:** | **Ziele:** |
| • Computer mit Internetzugang oder Computer mit dem installierten Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1<br>• Projektor<br>• Grundfertigkeiten im Umgang mit GeoGebra | • Vektoren mit GeoGebra zeichnen können<br>• Interaktive Konstruktionen zur Visualisierung von Zusammenhängen und Eigenschaften nutzen können<br>• technische Anleitungen (Eingabeanweisungen) selbstständig nutzen können |

# Makrospirale zur Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1

Arbeitsinseln mit grau hinterlegter Nummer sind ausgearbeitet.

Im Folgenden ist ein Ablauf für 5 bis 7 Unterrichtsstunden ausgearbeitet. Die 7. Unterrichtseinheit (Anwendungsbeispiele) kann als Vertiefung des Themas verwendet werden.

| Vorwissen /Voreinstellungen aktivieren | |
|---|---|
| A 00 | Einführung |

| Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten | |
|---|---|
| A 01 | Pfeile |
| A 02 | Länge eines Pfeiles |
| A 03 | Schiebung |
| A 04 | Rechenarten |
| A 05 | Vielfaches von Vektoren |
| A 06 | Parallele Vektoren |

| Komplexere Anwendungs-/Transferaufgaben | |
|---|---|
| A 07 | Anwendungen der Vektorrechnung (eventuell) |

Arbeitsmittel für alle Arbeitsinseln sind PC und der Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1 sowie die Projektmappe für Mitschriften.

# Mikrospirale A 00: Einführung

| Schritt | Lernaktivitäten der SchülerInnen | Sozial-form | Zeit | Arbeits-mittel |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Das einleitende Beispiel wird in einer Partnerarbeit durchgeführt. Ergebnisse werden in der Mappe festgehalten. | PA | 10’ | |
| 2 | Die Ergebnisse werden mit einem anderen Paar besprochen und verglichen. | GA | 5’ | |

Zurück zur Makrospirale

# Mikrospirale A 01: Pfeile

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *Koordinaten von Pfeilen*: SchülerInnen lernen die Darstellung und Schreibweise eines Pfeiles kennen (interaktive Übung). Die Ergebnisse der Aufgaben werden in der Mappe festgehalten. | EA | 10’ | |
| 2 | Zu zweit werden die Ergebnisse der einführenden Aufgabe (Koordinaten von Pfeile) besprochen. | PA | 3’ | |
| 3 | *Pfeile und Vektoren:* Zu zweit lernen die SchülerInnen die grafische Darstellung eines Vektors (interaktive Übung) kennen. Die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben werden in der Mappe festgehalten und mit der Zusammenfassung (nächste Seite) verglichen und wenn nötig ergänzt. | PA | 15’ | |
| 4 | Die Ergebnisse werden mit einem anderen Paar verglichen. | GA | 5’ | |

Zurück zur Makrospirale

# Fortsetzung Mikrospirale A 01: Pfeile

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Beginn der 2. Unterrichtseinheit | | | | |
| 1 | *Verschiedene Pfeile- derselbe Vektor*: Die SchülerInnen lernen verschiedene Repräsentanten eines Vektors kennen. | EA | 12’ | |
| 2 | Zu zweit werden die Ergebnisse der Aufgabe besprochen. | PA | 3’ | |

# Mikrospirale A 02: Länge eines Pfeils

| Schritt | Lernaktivitäten der SchülerInnen | Sozial-form | Zeit | Arbeits-mittel |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *Länge eines Pfeils*: Gemeinsam wird die Länge eines Pfeils bzw. eines Vektors erarbeitet. Die Definitionen und Ergebnisse der Aufgabe werden in die Mappe eingetragen. | PA | 10’ | |
| 2 | *Aufgabe zu Länge eines Pfeiles*: Die SchülerInnen bearbeiten je ein Beispiel. Der ältere bearbeitet das erste Beispiel der jüngere das zweite. Ergebnisse werden in die Mappe eingetragen. | EA | 5’ | |
| 3 | Die Partner erklären sich nun gegenseitig die erarbeiteten Beispiele und machen sich Notizen im Heft. | GA | 10’ | |

Zurück zur Makrospirale

# Mikrospirale A 03: Schiebung

| Schritt | Lernaktivitäten der SchülerInnen | Sozial-form | Zeit | Arbeits-mittel |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *Schiebung*: Der Lernschritt Schiebung wird von den SchülerInnen selbstständig erarbeitet und Notizen in die Mappe gemacht. | EA | 8’ | |

Zurück zur Makrospirale

# Mikrospirale A04: Rechenarten

| Beginn der 3. Unterrichtseinheit | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Schritt** | **Lernaktivitäten der SchülerInnen** | **Sozial-form** | **Zeit** | **Arbeits-mittel** |
| 1 | Die Lernschritte *Vektoraddition* und *Aufgabe* werden in Einzelarbeit durchgeführt und alle wichtigen Informationen und Ergebnisse in der Mappe festgehalten. | EA | 8’ | |
| 2 | Zu zweit werden die Ergebnisse der Einzelarbeit besprochen und die *Definition* mit der anschließenden *Übung zur Vektorrechnung* gemeinsam bearbeitet. Die Ergebnisse werden in der Mappe festgehalten. | PA | 10’ | |
| 3 | Der Lernschritt *Gegenvektor* wird von den SchülerInnen einzeln erarbeitet und Notizen in der Mappe gemacht. | EA | 6’ | |
| 4 | In einer Partnerarbeit wird das Thema Gegenvektor nochmals besprochen. | PA | 5’ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | Der Lernschritt *Vektorsubtraktion* wird zu zweit erarbeitet. Die Antworten der Aufgaben werden in der Mappe festgehalten. | PA | 10’ | |
| 6 | *Definition und Übung*: Die SchülerInnen erarbeiten diesen Lernschritt selbstständig und machen Notizen in die Mappe. | EA | 10’ | |

Zurück zur Makrospirale

## Fortsetzung Mikrospirale A 04: Rechenarten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Beginn der 4. Unterrichtseinheit | | | | |
| 1 | Gruppenrallye:<br>*Rechenregeln*: In einer 5er-Gruppe werden alle sechs Rechenregeln arbeitsteilig erarbeitet. Wobei ein/e SchülerIn „neutrales und inverses Element“ zusammen erarbeitet. | GA | 5’ | |
| 2 | Wurde die Darstellung und die Rechenregel aus dem Lernpfad verstanden, so behandelt nun jeder mit den vorgegebenen Vektoren (nächste Seite) die ihm/ihr zugeteilte Rechenregel. Dies kann entweder händisch oder mit GeoGebra dargestellt werden. | EA | 10’ | |
| 3 | Nun schließen sich alle SchülerInnen, welche die selbe Rechenregel erarbeiten mussten, zusammen und vergleichen ihre Ergebnisse | GA | 15’ | |
| 4 | Je eine SchülerIn aus der neu gebildeten Gruppe präsentiert eine Rechenregel. | Plenum | 10’ | |
| 5 | Alle SchülerInnen verfolgen die Präsentationen und notieren sich anschließend die restlichen Rechenregeln. | EA | 10’ | |

# Mikrospirale A 05: Vielfaches von Vektoren

| Beginn der 5. Unterrichtseinheit | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Schritt** | **Lernaktivitäten der SchülerInnen** | **Sozial-form** | **Zeit** | **Arbeits-mittel** |
| 1 | Der Lernschritt *Vielfaches eines Vektors* wird in einer Einzelarbeit erarbeitet (interaktive Übung) und Notizen gemacht. | EA | 8’ | |
| 2 | In einer Partnerarbeit wird das eben Erarbeitete besprochen. | PA | 5’ | |
| 3 | *Anwendung – Das Vielfache eines Vektors*:<br>Gemeinsam wird diese Anwendung (interaktive Übung) durchgearbeitet und die Fragen beantwortet. | PA | 10’ | |

Zurück zur Makrospirale

# Mikrospirale A 06: Parallele Vektoren

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *Parallele Vektoren*:<br>SchülerInnen lernen nun die Parallelität von zwei Vektoren kennen (interaktive Übung). | EA | 10’ | |
| 2 | Je zwei SchülerInnen versuchen nochmals den Sachverhalt *Parallele Vektoren* sich gegenseitig zu erklären. | PA | 5’ | |
| 3 | In einer Einzelarbeit versuchen die SchülerInnen nun die Aufgabe *Parallele Vektoren* zu lösen. | EA | 7’ | |
| 4 | Je zwei SchülerInnen gehen zusammen und vergleichen ihre Lösungen inklusive Skizzen. | PA | 5’ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | Die SchülerInnen haben nun den gesamten Stoff durchgearbeitet. Abschließend kann jeder den sogenannten Vektortest (Vektorsubtraktion-> Aufgabe) für einige Vektoren durchführen. | EA | 10’ | |
| | Die SchülerInnen können nun die restliche Zeit für die Hausübung verwenden. | EA | 13’ | Arbeitsblatt |

Zurück zur Makrospirale

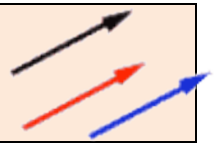
## Mikrospirale A 07: Anwendungen (eventuell)

| Beginn der 6./7. Unterrichtseinheit | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Schritt** | **Lernaktivitäten der SchülerInnen** | **Sozial-form** | **Zeit** | **Arbeitsmittel** |
| 1 | Gruppenralley: (Gruppenbildung nach Farbkärtchen) Anwendungen: In 4er-Gruppen werden je ein Anwendungsbeispiel (Beleuchtung, Laterne, Schiefe Ebene, Kräftegleichgewicht) ausgearbeitet. | GA | 25’ | |
| 2 | Jede einzelne Gruppe gestaltet ein Plakat für die anschließende Präsentation. | GA | 25’ | Plakat, Stifte |
| | Fortsetzung (7. Unterrichtseinheit) | | | |
| 3 | Die 4 Gruppen präsentieren nun ihren KollegInnen die einzelnen Anwendungsbeispiele. | Plenum | 40’ | |
| 4 | SchülerInnen machen sich nun einige Notizen zu den Anwendungsbeispielen, welche im Klassenraum aufgehängt werden. | EA | 10’ | |

Zurück zur Makrospirale

## *10.4. Arbeitsplan (zur Lernspirale)*

**Arbeitsplan zur Lernspirale:**
***Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1***



Dieser Arbeitsplan hilft dir, möglichst genau und strukturiert mit dem Lernpfad zu arbeiten. Sobald du einen Arbeitsauftrag erledigt hast, kannst du diesen in der rechten Spalte „Erledigt“ abhaken. Achte aber drauf, dass du jeden Lernschritt genau in deiner Mappe dokumentierst! Du sollst ein sogenanntes Lernprotokoll führen. Schreibe immer eine Überschrift, die Angabe in Kurzform und deine Antwort auf. Fertige wenn nötig eine passende Skizze an, außerdem sollst du notieren, wann du Probleme hattest, was also schwierig aber auch einfach war!

| Stunde | Thema | Arbeitsauftrag | Sozial-form | Zeit (min) | HÜ | Abgabe Hü | Erledigt ☑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A 00 Einführung | Das einleitende Beispiel wird erarbeitet, Ergebnisse mit einem anderen Paar vergleichen. | PA | 15’ | Beispiele | Datum | |
| | A 01 Pfeile | Koordinaten von Pfeilen: Ergebnisse werden mit PartnerIn besprochen | EA | 13’ | | | |
| | | Pfeile und Vektoren: Ergebnisse mit einem anderen Paar sowie mit der Zusammenfassung vergleichen (nächste Seite), wenn nötig ergänzen. | PA | 20’ | | | |
| 2 | A 01 Pfeile (*Fortsetzung*) | Verschiedene Pfeile- derselbe Vektor: Ergebnisse mit PartnerIn vergleichen. | EA | 15’ | | | |

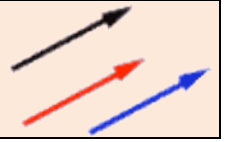
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A 02 Länge eines Pfeiles | Länge eines Pfeils: Ergebnisse und Definition in Mappe eintragen. | PA | 10’ | | | |
| | | Aufgabe zu Länge eines Pfeils: Jeder löst ein Beispiel. Der ältere bearbeitet das erste, der jüngere das zweite Beispiel. Gegenseitig erklärt ihr euch die Beispiele. | PA | 15’ | | | |
| 2 | A 03 Schiebung | Schiebung: Arbeite selbstständig und vergleiche die Ergebnisse mit dem Lösungslink. | EA | 10’ | | | |
| 3 | A 04 Rechenarten | Vektoraddition + Aufgabe: Arbeite selbstständig. Vergleiche deine Ergebnisse mit einem/r PartnerIn | EA | 10’ | Beispiele | Datum | |
| | | Definition + Aufgabe: Arbeitet gemeinsam diese Seite durch. | PA | 10’ | | | |
| | | Gegenvektor: Arbeite selbstständig und besprich diese Seite anschließend mit einem/r PartnerIn | EA | 10’ | | | |
| | | Vektorsubtraktion: Arbeitet gemeinsam den Inhalt dieser Seite durch. | PA | 10’ | | | |
| | | Definition + Aufgabe: Arbeite selbstständig und vergleiche mit dem Lösungslink. | EA | 10’ | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | A 04 Rechenarten (*Fortsetzung*) | Rechenregeln: Ihr werdet nun in Gruppen eingeteilt. Teilt euch innerhalb der Gruppe auf, wer welche Regel ausarbeitet, wobei „neutrales und inverses Element“ von einem/einer SchülerIn bearbeitet wird. Ihr könnt die Regeln entweder mit GeoGebra oder händisch darstellen. | GA | 15’ | Beispiele | Datum | |
| | | Neue Gruppenbildung: SchülerInnen mit den selben bearbeiteten Rechenregeln bilden die neuen Gruppen. Vergleicht die Ergebnisse | GA | 15’ | | | |
| | | Je ein/e SchülerIn aus den neu gebildeten Gruppen präsentiert nun die Rechenregeln vor der gesamten Klasse. Jeder notiert sich die fehlenden Rechenregeln. | Plenum | 15’ | | | |
| **5** | A 05 Vielfaches von Vektoren | Vielfachs von Vektoren: Arbeite selbstständig und vergleiche die Ergebnisse mit einem/r PartnerIn | EA | 13’ | Arbeitsblatt | Datum | |
| | | Anwendung: Bearbeitet zusammen diese Seite. Vergleicht eure Ergebnisse mit dem Lösungslink | PA | 10’ | | | |
| | A 06 Parallele Vektoren | Parallele Vektoren: Arbeite selbstständig und vergleiche die Ergebnisse mit einem/r PartnerIn | EA | 15’ | | | |
| | | Aufgabe: Löse selbstständig das Beispiel und vergleiche deine Ergebnisse mit einem/r PartnerIn. | EA | 12’ | | | |
| 6 | A 07 Anwendungen | Gruppenbildung: 4er Gruppen<br>Pro Gruppe wird ein Anwendungsbeispiel bearbeitet. Jede Gruppe muss ein Plakat für eine anschließende Präsentation vorbereiten. | GA | 50’ | Projekt | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | PRÄSENTATION | Präsentation der einzelnen Anwendungsbeispiele. | Plenum | 50’ | | | |

## *10.5. Ein weiterer Unterrichtsvorschlag*

**Arbeitsplan:**
***Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1***



Dieser Arbeitsplan hilft dir, möglichst genau und strukturiert mit dem Lernpfad zu arbeiten. Sobald du einen Arbeitsauftrag erledigt hast, kannst du diesen in der rechten Spalte „Erledigt“ abhaken. Achte aber drauf, dass du jeden Lernschritt genau in deiner Mappe dokumentierst! Du sollst ein sogenanntes Lernprotokoll führen. Schreibe immer eine Überschrift, die Angabe in Kurzform und deine Antwort auf. Fertige wenn nötig eine passende Skizze an, außerdem sollst du notieren, wann du Probleme hattest, was also schwierig aber auch einfach war!

| **Titel** | **Arbeitsauftrag** | **Datum/Zeit** | **Sozial-form** | **Kontrolle** | **Erledigt** ☑ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Einleitendes Beispiel:** | | | | | |
| Einleitung | Arbeite mit deinem/r PartnerIn die Aufgaben 1) bis 4) durch. Notiert die Lösungen dazu in eure Mappe. Vergleicht die Lösungen mit dem Lösungslink.<br>Überlegt euch zu zweit mindestens drei Beispiele aus dem alltäglichen Leben wo Koordinaten verwendet werden. Notiert diese Beispiele ebenfalls in eure Mappe. | | PA | selbst mit Lösungslin k | |
| **Pfeile**: | | | | | |
| Pfeile | Arbeite die beiden Aufgaben gewissenhaft durch und notier alles genau in deinem Heft, auch den Merksatz am Ende der Seite. Vergleiche die Lösungen anschließend mit einem Mitschüler oder eine Mitschülerin. | | EA | Mitschüler Innen | |
| Pfeile und Vektoren | Arbeite die Aufgabe genau durch. Versuch die Aufgaben so gut wie möglich zu lösen. Notiere die Lösungen in deine Mappe. | | EA | selbst mit Lösungslin k | |

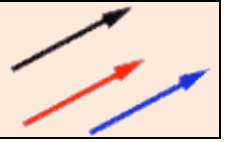
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Zusammen-fassung | Vergleiche deine Lösung der vorherigen Aufgabe mit dieser Zusammenfassung. Erweitere, falls nötig, deine Mitschrift, sodass du beide Berechnungen übersichtlich in der Mappe stehen hast. | | EA | selbst mit Zusamme n-fassung | |
| Aufgabe | Arbeite dich nun durch die Aufgabenstellungen 1) bis 4) durch. Skizziere dazu deine Beispiele in deiner Mappe. | | EA | | |
| Länge eines Pfeils | Arbeite diese Seite zum Thema Länge eines Pfeils genau durch und löse die Aufgabenstellung. Mach notwendige Skizzen sowie Notizen in deine Mappe. | | EA | selbst mit Lösungslin k | |
| Aufgabe | Bearbeite nun mit einem/r PartnerIn beide Aufgabenstellungen. Der Jüngere von euch beiden bearbeitet die erste Aufgabe, der Ältere die zweite Aufgabe. Anschließend erklärt ihr euch gegenseitig die Beispiele und macht Notizen sowie Skizzen in eure Mappe. | | PA | selbst mit Lösungslin k | |
| **Schiebung**: | | | | | |
| Schiebung | Versuche nun beide Aufgabenstellungen selbstständig und genau durchzuarbeiten. Notiere alles genau in deinem Heft. Vergleiche anschließend mit einem/r PartnerIn die Lösungen der Aufgaben. | | EA | Mitschüler In sowie mit Lösungslin k | |
| **Rechenarten**: | | | | | |
| Vektoraddition | Bearbeite nun gemeinsam mit einem/r PartnerIn die Aufgabe. Versucht die Aufgabe möglichst gut zu lösen. Notiert alles genauestens in eure Mappe. | | PA | selbst mit Lösungslin k | |
| Aufgabe | Versucht diese Aufgabe ebenfalls gemeinsam zu bearbeiten. Schreibt alles in eure Mappe inklusive Skizze. | | PA | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Definition | Vergleiche nun selbstständig die Definition der Addition von zwei Vektoren mit eurer Vermutung. Ergänze wenn nötig deine Mitschrift. Löse anschließend die Aufgabe darunter. | | EA | selbst mit Definition/ selbst mit Lösungslin k | |
| Gegenvektor | Arbeite selbstständig und genau diese Seite durch. Notiere alles genau in deine Mappe. Besprich anschließend diese Seite mit einem/r PartnerIn. | | EA | Mitschüler In | |
| Vektor- subtraktion | Arbeite alleine die Aufgabenstellung der Vektorsubtraktion durch. Versuche möglichst gewissenhaft deine Lösungen in die Mappe zu schreiben. Besprich anschließend diese Aufgabe mit einem/r PartnerIn. | | EA | selbst mit Lösungslin k | |
| Definition | Vergleiche nun die Definition der Vektorsubtraktion mit deiner Vermutung aus der vorherigen Aufgabe, ergänze deine Mitschrift wenn nötig. Löse die Aufgabe darunter. | | EA | selbst mit Lösungslin k | |
| Aufgabe | Versuche diese Aufgabe zu lösen. Mach diese Aufgabe für 10 verschiedene „u“. Notiere die richtigen Antworten und die dazugehörige Zeit (wird in einem Pop-up Fenster angezeigt). | | EA | selbst mit „überprüfe “ | |
| Rechenregeln | Bearbeite gemeinsam mit einem/r PartnerIn die Rechenregeln a) bis f). Der/Die Größere bearbeitet die Regeln a), c) und e), der/die Kleinere die Regeln b), d) und f). Erklärt euch anschließend gegenseitig die Rechenregeln. Skizziert euch diese in die Mappe. | | PA | | |
| Aufgabe | Löse nun die Aufgaben a) bis f). Mach eine Skizze zu jeder Rechenregel. Vergleiche anschließend mit einem/r PartnerIn. Du kannst die Rechenregeln auch mit GeoGebra zeichnen (öffne dazu ein neues Zeichenblatt und druck es anschließend aus). | | EA | Mitschüler In | |
| **Vielfaches von Vektoren:** | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Vielfaches | Arbeite diese Seite zum Thema Vielfaches von Vektoren genau durch, notiere alle Lösungen zur Aufgabe in deine Mappe. | | EA | selbst mit Lösungslin k | |
| Anwendung | Bearbeite dieses Anwendungsbeispiel mit einem Partner oder einer Partnerin. | | PA | selbst mit Lösungslin k | |
| **Parallele Vektoren**: | | | | | |
| Parallele Vektoren | Arbeite gemeinsam mit einem/r PartnerIn diese Seite durch. Versuche möglichst genau alles in der Mappe zu dokumentieren. | | PA | selbst mit Lösungslin k | |
| Aufgabe | Löse diese Aufgabe gewissenhaft und vergleiche die Lösung anschließend mit einem Partner oder einer Partnerin. | | EA | Mitschüler Innen | |

# Projektablauf zu den Anwendungsbeispielen:

***Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1***



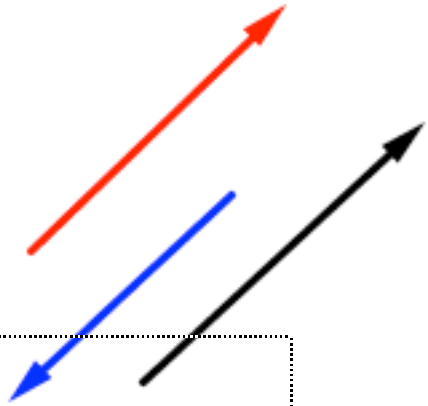
Im folgenden wird der Projektablauf der noch zu erarbeitenden Anwendungsbeispiele aus dem Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene ,Teil 1 erklärt.

| **Titel** | **Arbeitsauftrag** | **Datum/ Zeit** | **Sozial-form** | **Kontrolle** | **Präsent-ation ☑** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Einteilung der Gruppen** | | | | | |
| Einteilung | Prinzip des Abzählens:<br>Es wird der Reihe nach von 1 bis 4 abgezählt. Die SchülerInnen mit der gleichen Zahl bilden je eine Gruppe. | | GA | | |
| **Gruppe mit der Nummer 1** | | | | | |
| Beleuchtung | Erarbeitet als erstes das einführende Beispiel (Einleitung). Anschließend beschäftigt ihr euch mit dem Anwendungsbeispiel Beleuchtung. Versucht dieses Beispiel möglichst gut vorzubereiten und zu verstehen, sodass ihr anschließend eine Präsentation vor euren MitschülerInnen machen könnt. Gestaltet dazu ein Plakat. Ihr könnt auch einen Beamer verwenden, wenn für in eure Präsentation das interaktive Applet verwenden möchtet. | | GA | | |
| **Gruppe mit der Nummer 2** | | | | | |
| Laterne | Erarbeitet als erstes das einführende Beispiel (Einleitung). Anschließend beschäftigt ihr euch mit dem Anwendungsbeispiel Laterne. Versucht dieses Beispiel möglichst gut vorzubereiten und zu verstehen, sodass ihr anschließend eine Präsentation vor euren MitschülerInnen machen könnt. Gestaltet dazu ein | | GA | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Plakat. Ihr könnt auch einen Beamer verwenden, wenn ihr für eure Präsentation das interaktive Applet verwenden möchtet. | | | | |
| **Gruppe mit der Nummer 3** | | | | | |
| Schiefe Ebene | Erarbeitet als erstes das einführende Beispiel (Einleitung). Anschließend beschäftigt ihr euch mit dem Anwendungsbeispiel Schiefe Ebene. Versucht dieses Beispiel möglichst gut vorzubereiten und zu verstehen, sodass ihr anschließend eine Präsentation vor euren MitschülerInnen machen könnt. Gestaltet dazu ein Plakat. Ihr könnt auch einen Beamer verwenden, wenn ihr für eure Präsentation das interaktive Applet verwenden möchtet. | | GA | | |
| **Gruppe mit der Nummer 4** | | | | | |
| Kräftegleich-gewicht | Erarbeitet als erstes das einführende Beispiel (Einleitung). Anschließend beschäftigt ihr euch mit dem Anwendungsbeispiel Kräftegleichgewicht. Versucht dieses Beispiel möglichst gut vorzubereiten und zu verstehen, sodass ihr anschließend eine Präsentation vor euren MitschülerInnen machen könnt. Gestaltet dazu ein Plakat. Ihr könnt auch einen Beamer verwenden, wenn ihr für eure Präsentation das interaktive Applet verwenden möchtet. | | GA | | |

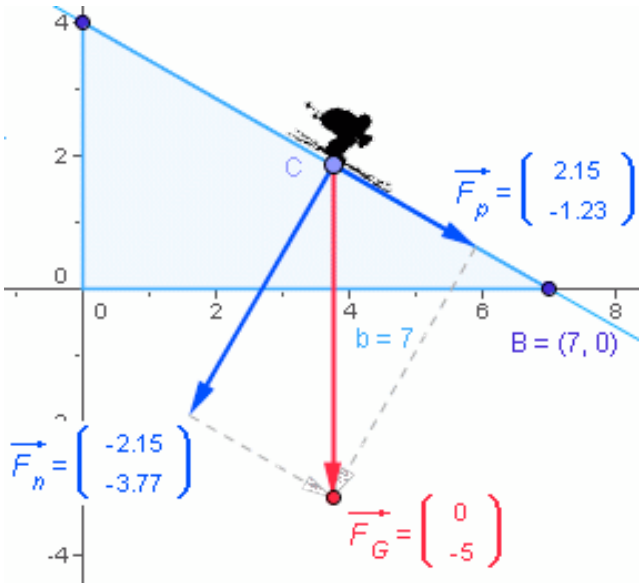
## *10.6. Die Projektmappe*

### 10.6.1. Deckblatt



# Projektmappe

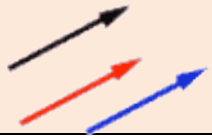
Lernpfad: Vektorrechnung in der Ebene Teil 1




Name: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Klasse: _ _ _ _

## 10.6.2. Bedienungsanleitung

**Bedienungsanleitung:**
***Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1***



Dieser Lernpfad wird ca. 6 Unterrichtseinheiten benötigen. Arbeite den Lernpfad gewissenhaft durch und folge stets den Anweisungen des Arbeitsplanes.
Du wirst während dieses Lernpfads eine Projektmappe führen. Diese Projektmappe beinhaltet folgende Blätter:

- ✓ **Deckblatt**
- ✓ **Bedienungsanleitung**
  Dieses Blatt!
- ✓ **Arbeitsplan**
  Du kannst genaue Anweisungen zum Durcharbeiten des Lernpfads ablesen.
- ✓ **Hausübungsbeispiele**
  Das ist eine Liste mit allen Hausübungsbeispielen. Mach diese Hausübungen sorgfältig und gewissenhaft und gib sie rechtzeitig zu den jeweiligen Abgabeterminen ab.
- ✓ **Mappeneinträge:**
  - ✓ **Mitschrift**
    Du wirst oft Aufgaben, welche durch den gesamten Lernpfad hindurch mit gekennzeichnet sind, auf einem Zettel lösen, oder Skizzen bzw. Merksätze, Notizen zu den jeweiligen Aufgaben machen. Versuche möglichst gut strukturiert deine Mitschrift zu organisieren (Überschrift des Themas im Lernpfad, ...)
  - ✓ **Lernprotokoll**
    Führe ein Lernprotokoll. Versuche folgende Fragen zu den einzelnen Themen zu beantworten:
    Wo habe ich was gelernt? Was war einfach/schwierig? Wo habe ich noch Fragen an die Lehrkraft?
- ✓ **Arbeitsblätter**
- ✓ **Checkliste**

**Ziele des Lernpfades:**
Nach Durcharbeiten dieses Lernpfades sollst du

- erklären können, was der Unterschied zwischen einem Pfeil und einem Vektor ist.
- Beispiele dafür angeben können, wozu man Vektoren verwenden kann.
- Vektoren mit Hilfe von Koordinaten angeben können.
- Vektoren addieren, subtrahieren, Vielfache und Parallele von Vektoren ausrechnen können.
- die Länge von Vektoren berechnen können.

**Viel Spaß!**

## 10.6.3. Arbeitsblatt

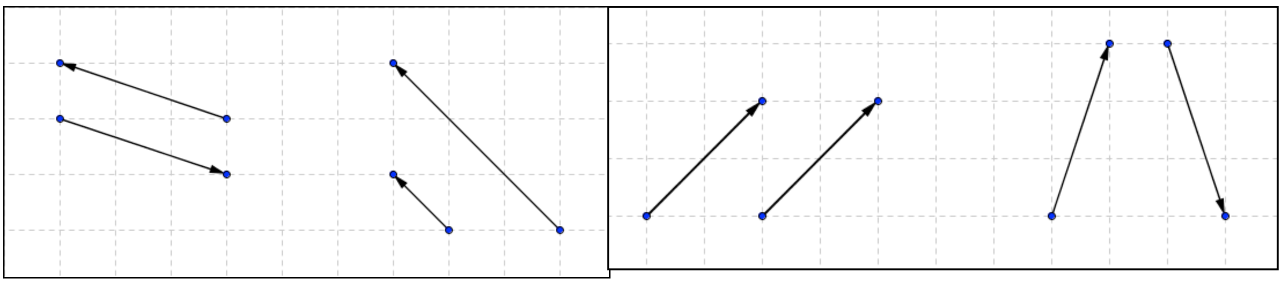
# Arbeitsblatt – Vektorrechnung

### Was ist ein Vektor?

Ein Vektor wird durch ein _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ dargestellt. Man kann einen Vektor $\vec{v}$ in einer
_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ oder in einer _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ angeben.
Geometrisch wird ein Vektor durch einen _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ mit _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ A und
_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ E dargestellt.
Man kann stets aus zwei Punkten einen _ _ _ _ _ _ ermitteln.
Schreib diesen Rechenvorgang in allgemeiner Schreibweise mit A=($x_A|y_A$) und B=($x_B|y_B$) auf:

$$=\begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$$

Verschiedene Pfeile repräsentieren denselben _ _ _ _ _ _, wenn sie gleich _ _ _ _ _ _, _ _ _ _ _ _ und gleich _ _ _ _ _ _ sind.
Beischreibe die unten abgebildeten Pfeile:



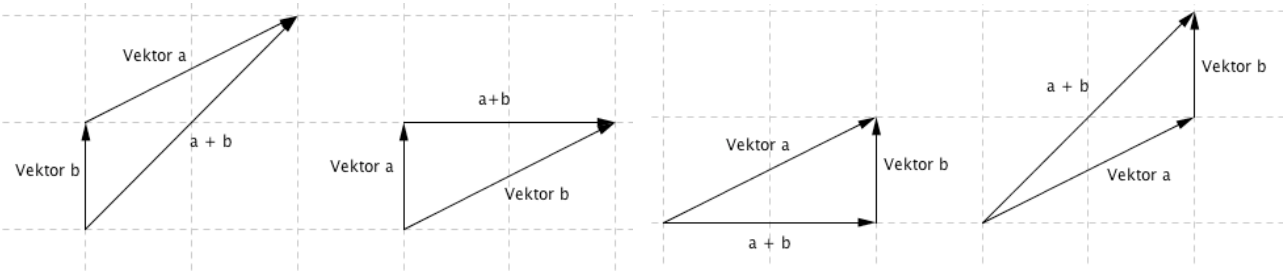
_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Der Betrag eines Vektors $\vec{v}$ ergibt die _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _.

## Addition und Subtraktion eines Vektors

Kreuze die richtige Vektoraddition an:




Der Vektor -$\vec{v}$ heißt _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _und ist zum Vektor $\vec{v}$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _.

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ werden subtrahiert, in dem man Vektor $\vec{v}$ mit dem _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ von $\vec{w}$ addiert . Schreibe diesen Rechenvorgang allgemein auf:

$$\vec{a} - \vec{b} = \left( \quad \right) - \left( \quad \right) = \left( \quad \right)$$

Mit Vektoren kann man in Hinblick auf Addition und Subtraktion wie mit _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ rechnen, es gelten dieselben _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _!

## Vielfaches von Vektoren / Parallele Vektoren

Wird ein Vektor $\vec{v}$ mit einer Zahl t multipliziert, spricht man von einer _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _.

$\vec{w}$ = t. $\vec{v}$ Der Vektor $\vec{w}$ ist dabei ein _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ des Vektors $\vec{v}$ .

Vektoren, welche sich nur durch eine Multiplikation mit einem Skalar t unterscheiden, sind _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _.

### 10.6.4. Checkliste

**Checkliste:**
(Kompetenzen für die neue Reifeprüfung)
***Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1***

Du hast dich nun intensiv mit dem Thema Vektoren auseinander gesetzt und den Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene Teil 1 gewissenhaft und sorgfältig durchgearbeitet. Damit du eine Übersicht hast, über welches Wissen und welche Kompetenzen du nun verfügen solltest, hast du jetzt die Möglichkeit, dies mittels einer Checkliste zu kontrollieren.

☒ Kreuze an, was zutrifft!

| | |
|---|---|
| | Ich weiß, was ein Vektor ist und wie dieser angeschrieben wird. |
| | Ich weiß, wie ich aus Punkten einen Vektor ermitteln kann bzw. wie man aus einem Anfangspunkt und einem Vektor den Endpunkt berechnen kann |
| | Ich weiß, was der Betrag eines Vektors ist, und wie man den Betrag berechnen kann. |
| | Ich weiß, dass man Vektoren als Mittel zur Schiebung einsetzen kann. |
| | Ich weiß, wie man Vektoren addiert und subtrahiert und wie man diese Rechenoperation rechnerisch und grafisch darstellt. |
| | Ich weiß, wie man den Gegenvektor zu einem gegebenen Vektor rechnerisch und grafisch bestimmt. |
| | Ich weiß, wie man Vektoren mit einer Zahl (Skalarmultiplikation) multipliziert und kann diese rechnerisch und grafisch darstellen |
| | Ich weiß, wann zwei Vektoren parallel sind und kann dies rechnerisch nachprüfen. |
| | Ich kann mehrere Anwendungsbeispiele, in denen Vektoren verwendet werden, nennen und erklären. |

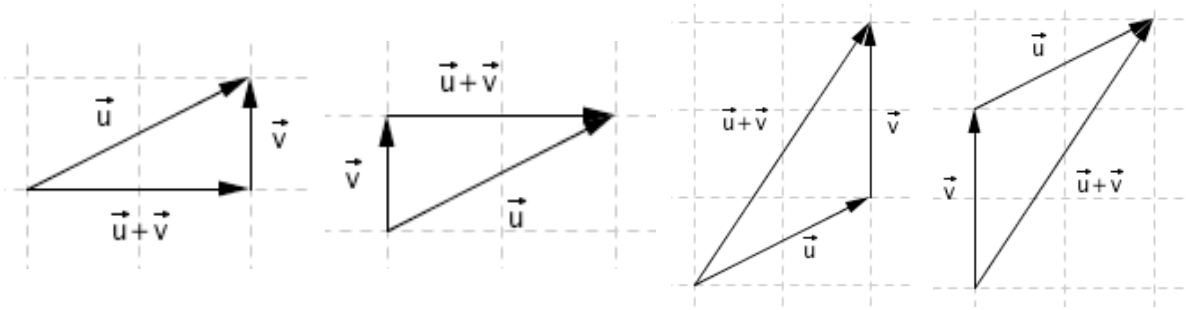
## *10.7. Wissenstest*

# Wissenstest

zum Lernpfad Vektorrechnung in der Ebene Teil 1

**1. Aufgabe:**

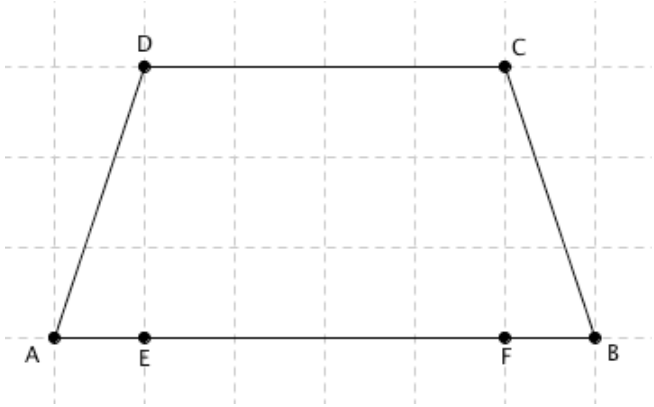
Kreuze an, welche Darstellung der Vektoraddition richtig ist!




☐ ☐ ☐ ☐

**2. Aufgabe:**

a) Kreuze an, welche Aussagen zu diesem Trapez richtig sind!




$\overrightarrow{AB} = 1{,}5\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ $\overrightarrow{EC} \parallel \overrightarrow{DF}$

b) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes und kreuze die richtige Antwort an!

☐ A = 10 $E^2$ ☐ A = 15 E2 ☐ A = 5 E2 ☐ A = 15 E

**3. Aufgabe:**

Gegeben ist ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechne den Vektor $\vec{w}$, der parallel ist zum Vektor $\vec{v}$. Dieser Vektor $\vec{w}$ ist jedoch um eine Einheit kürzer als $\vec{v}$!

☐ $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{w} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{w} = 4\begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 3{,}2 \end{pmatrix}$

**4. Aufgabe**

Kreuze an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind!

| Richtig | Falsch | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | Es gibt einen Punkt und einen Pfeil der Ebene, denen derselbe Vektor zugeordnet wird. |
| ☐ | ☐ | Es gibt unendlich viele Vektoren denen derselbe Pfeil zugeordnet wird. |
| ☐ | ☐ | Jedem Punkt der Ebene entspricht genau ein Vektor. |
| ☐ | ☐ | Alle gleich langen Pfeile bilden einen Vektor. |
| ☐ | ☐ | Alle gleich langen, parallelen und gleich orientierten Pfeile gehören zum selben Vektor. |

# 11. Verzeichnisse

## *11.1. Abkürzungsverzeichnis*

| | |
|---|---|
| ACDCA | Austrian Center for Didactics of Computer Algebra |
| AHS | Allgemeinbildende höhere Schule |
| APS | Allgemeine Pflichtschule |
| BHS | Berufsbildende höhere Schule |
| bifie | Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens |
| bmbwk | Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur |
| bmukk | Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur |
| bzw. | beziehungsweise |
| CAL | Computer aided learning |
| CAS | Computer-Algebra-Software |
| CAT | Computer aided training |
| CBT | Computer-based-training |
| CD-ROM | Compact Dsik-Read Only Memory |
| CMS | Content Management System |
| CUL | Computer-unterstütztes Lernen |
| d.h. | das heißt |
| DGS | Dynamische-Geometrie-Software |
| Dipl.-Ing. | Diplom-IngeneurIn |
| Dr. | DoktorIn |
| E-Learning | Electronic Learning |
| EA | Einzelarbeit |
| et al. | et alii |
| etc. | et cetera |
| EVA | Eigenverantwortliches Lernen |

| | |
|---|---|
| f | und die folgende Seite |
| ff | fortfolgende Seite |
| FH | Fachhochschule |
| GA | Gruppenarbeit |
| ILIAS | Integriertes Lern-, Informations- und Arbeitskooperationssystem |
| $IR^2$ | zweidimensionaler Raum der reellen Zahlen |
| LAN | Local Area Network |
| LCMS | Learning Content Management System |
| LMS | Learning Management System |
| Mag. | Magister/Magistra |
| Mag. rer. nat. | Magister/Magistra rerum naturalium; Magister/Magistra der Naturwissenschaft |
| MIT | Massachusetts Institute of Technology |
| MR | Ministerialrat |
| MS Office | Microsoft Office |
| o.A. | ohne Angabe |
| ODL | Open and distance learning |
| PA | Partnerarbeit |
| Prof. | ProfessorIn |
| S. | Seite |
| SK I | Sekundarstufe I |
| SK II | Sekundarstufe II |
| SOL | Selbstorganisiertes Lernen |
| t | Zeit |
| TKS | Tabellen-Kalkulations-Software |
| TV | Television |
| Uni.-Prof. | UniversitätsprofessorIn |
| v | Geschwindigkeit |
| vgl. | vergleiche |

| | |
|---|---|
| VOBS | Vorarlberger Bildungsserver |
| WBT | Web-based-training |
| WLAN | Wireless Local Area Network |
| WPG | Wahlpflichtgegenstand |
| zit. nach | zitiert nach |
| ZUM | Zentrale für Unterrichtsmaterialien |

## 11.2. Abbildungsverzeichnis

*Abbildung 1: Medienpädagogik und deren Teilbereiche* ..... 15
*Abbildung 2: Gleichung lösen mit Derive* ..... 18
*Abbildung 3: 3-D Grafik in Maxima (vgl. www.matheplanet.com, 2006)* ..... 18
*Abbildung 4: Beispiel TKS* ..... 19
*Abbildung 5: Satz des Thales mit GeoGebra* ..... 21
*Abbildung 6: Das neue Haus des Lernens* ..... 25
*Abbildung 7: Spiralbohrer (Klippert, 2004, S. 68)* ..... 27
*Abbildung 8: Gruppenpuzzle (Stangl, 2005)* ..... 30
*Abbildung 9: Gegenüberstellung Lehrerzentrierter Unterricht – SOL* ..... 31
*Abbildung 10: Kompetenzbereiche (Meiser, 2011)* ..... 41
*Abbildung 11: Aufgabenstellung Prototyp II* ..... 44
*Abbildung 12: Addition zweier ganzer Zahlen* ..... 51
*Abbildung 13: Addition zweier ganzen Zahlen* ..... 51
*Abbildung 14: Vektor als Pfeilklasse* ..... 52
*Abbildung 15: Vektor als Verschiebung* ..... 53
*Abbildung 16: Vektor als Zahlenpaar* ..... 53
*Abbildung 17: geometrische Vektoraddition* ..... 54
*Abbildung 18: arithmetische Vektoraddition* ..... 55
*Abbildung 19: zentrische Streckung* ..... 55
*Abbildung 20: Applet Beleuchtung* ..... 68
*Abbildung 21: Punkte verschieben* ..... 69
*Abbildung 22: Home-Seite* ..... 73
*Abbildung 23: Startseite nach der Überarbeitung* ..... 73
*Abbildung 24: Einleitung vor der Überarbeitung* ..... 75
*Abbildung 25: Einleitung nach der Überarbeitung* ..... 76
*Abbildung 26: Pfeile Teil 1 nach der Überarbeitung* ..... 78
*Abbildung 27: Pfeile Teil 2 nach der Überarbeitung* ..... 79
*Abbildung 28: Pfeile Teil 3 nach der Überarbeitung* ..... 79
*Abbildung 29: Länge eines Pfeils nach der Überarbeitung* ..... 80
*Abbildung 30: Aufgaben zu Länge eines Pfeils* ..... 81
*Abbildung 31: Schiebung nach der Überarbeitung* ..... 82
*Abbildung 32: Vektoraddition nach der Überarbeitung* ..... 83
*Abbildung 33: Einstieg in die Vektoraddition nach der Überarbeitung* ..... 84
*Abbildung 34: Definition & Aufgabe nach der Überarbeitung* ..... 85
*Abbildung 35: Gegenvektor vor der Überarbeitung* ..... 86
*Abbildung 36: Link des Nullvektors vor der Überarbeitung* ..... 86
*Abbildung 37: Gegenvektor nach der Überarbeitung* ..... 87
*Abbildung 38: Vektorsubtraktion nach der Überarbeitung* ..... 88
*Abbildung 39: Definition und Aufgabe nach der Überarbeitung* ..... 88
*Abbildung 40: Vektortest* ..... 89
*Abbildung 41: Rechenregeln vor der Überarbeitung* ..... 90
*Abbildung 42: Rechenregeln Teil 1 nach der Überarbeitung* ..... 90
*Abbildung 43: Rechenregeln Teil 2 nach der Überarbeitung* ..... 91
*Abbildung 44: Aufgabe nach der Überarbeitung* ..... 91
*Abbildung 45: Vielfaches von Vektoren Teil 1* ..... 92
*Abbildung 46: Vielfaches von Vektoren Teil 2* ..... 93
*Abbildung 47: Parallele Vektoren nach der Überarbeitung* ..... 94
*Abbildung 48: Parallele Vektoren Aufgabe* ..... 94
*Abbildung 49: Einleitung nach der Überarbeitung* ..... 95
*Abbildung 50: Beleuchtung nach der Überarbeitung* ..... 96
*Abbildung 51: Laterne nach der Überarbeitung* ..... 96
*Abbildung 52: Schiefe Ebene nach der Überarbeitung* ..... 97
*Abbildung 53: gestrichene Frage* ..... 97
*Abbildung 54: Kräfte im Gleichgewicht vor der Überarbeitung* ..... 98

*Abbildung 55: Kräfte im Gleichgewicht nach der Überarbeitung* ..... *99*
*Abbildung 56: Übung Vektoren ablesen* ..... *100*
*Abbildung 57: Kompetenzen im Lernpfad* ..... *103*
*Abbildung 58: Ausschnitt aus dem Arbeitsplan (Lernspirale)* ..... *106*
*Abbildung 59: Aufgabe 1 aus dem Wissenstest* ..... *109*
*Abbildung 60: Aufgabe 4 aus dem Wissenstest* ..... *110*

## 11.3. Tabellenverzeichnis

*Tabelle 1: Arbeitsinseln Lernspirale zur Vektorrechnung* ..... *27*
*Tabelle 2: Aufgabenstellung Prototyp I* ..... *44*
*Tabelle 3: Die entstandenen Lernpfade* ..... *63*
*Tabelle 4: Ausschnitt aus dem Didaktischen Kommentar* ..... *103*
*Tabelle 5: Stufen einer Lernspirale* ..... *104*

## 11.4. Literaturverzeichnis

Aufenanger, S. (2003). Lernen mit neuen Medien – mehr Wissen und bessere Bildung? In Keil-Slawik, R. & Kerres, M. (Hrsg.), Wirkung und Wirksamkeit Neuer Medien in der Bildung (S.161-171). Münster: o.A.

Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005). Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelson Verlag Scriptor.

Beer, R. (2008). Eigenverantwortliches Arbeiten und Lernen nach Heinz Klippert. Praxistools zum Methoden- und Kommunikationstraining, Methodenüberblick zum handlungsorientierten Unterricht – Implementierungsstrategien. WWW: http://homepage.univie.ac.at/rudolf.beer/Eigenverantwortliches_Arbeiten_und_Lernen_nach_Heinz_Klippert_2008.pdf (2011-04-19)

Bierbaumer, I., Bleier, G., Dormayr, A., Embacher, F., Heugl, H., Himpsl, K., Hohenwarter, M., Jauck, G., Klinger, W., Lindner, A., Stepancik, E. & Wegscheider, W. (2006). Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Summary. WWW: http://www.austromath.at/medienvielfalt (11-02-16)

bifie. (2010). Bildungsstandards in Österreich. Überprüfung und Rückmeldung. WWW: http://www.bifie.at/sites/default/files/pub-pdf/2010-11-11_bist-rm.pdf (2011-04-04)

bifie. (2011). Bildungstandards. WWW: www.bifie.at/bildungsstandards (11-04-05)

Bleier, G. Lindenberg, J., Lindner, A. & Stepancik, E. (2009). Dimensionen Mathematik 5. Wien: E. Dorner Verlag.

bmukk. (2003). AHS- Lehrplan Broschüre zur zusammenfassenden Darstellung der Neuerungen ab dem Schuljahr 2004/05. WWW: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11755/ahs_lp_broschuere.pdf (11-03-25)

bmukk. (2004a). Lehrplan AHS-Oberstufe. Mathematik. WWW: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (11-04-05)

bmukk. (2004b). Lehrplan AHS-Oberstufe. Allgemeiner Teil. WWW: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11668/11668.pdf (11-04-05)

bmukk. (2009). Vorblatt und Erläuterungen. WWW: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/17203/Vo_bildungsstandards_mat.pdf (11-04-05)

Breitfeld, T. (2009). Neue Lehr- und Lernformen im Spiegel der pädagogischen Praxis. Eine Evaluation des Gruppenpuzzles. WWW: http://books.google.at/ (2011-04-18)

Bürger, H. & Reichel, H.C. (1981). Arbeitsgemeinschaft: Vektoren im Unterricht. WWW: http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1981%20Band%207/BuergerReichel1981.pdf (11-03-24)

Dangl, M., Fischer, R., Heugl, H., Kröpfl, B., Liebscher, M., Peschek, W. & Siller, H-St. (2009a). Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“ – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen. WWW: http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/sRP-M_September_2009.pdf (11-02-26)

Dorfmayr, A. (2011). E-Learning. Lernpfade. WWW: http://www.dorfmayr.org/ (2011-04-21)

elearning. (2009). elearning. WWW: http://www.elearning-wiki.de/doku.php?id=elearning:definitionen:definition_elearning (11-04-15)

Embacher, F. (2004a). Das Konzept der Lernpfade in der Mathematik-Ausbildung. WWW: http://www.mathe-online.at/literatur/iwk7.6.2004/artikelIWK.rtf (2011-04-21)

Embacher, F. (2004b). Lernpfade – Wege zu selbstgesteuertem Lernen. WWW: http://www.mathe-online.at/monk/TU26.2.2004/ (2011-04-21)

Embacher, F. & Oberhuemer, P. (2006). Das Konzept der Lernpfade in der Mathematikausbildung. In A. Mettinger, P. Oberhuemer & C. Zwiauer (Hrsg.), eLearning an der Universität Wien. Forschung – Entwicklung – Einführung. (S. 203 – 213). Münster: Waxmann Verlag

Embacher, F. & Oberhuemer, P. (2009a). mathe online – ein Brückenschlag von der Schule zur weiterführenden Ausbildung. Das Angebot von mathe online. WWW: http://www.mathe-online.at/nml/papers/Abstract.doc (11-03-16)

Embacher, F. & Oberhuemer, P. (2009b). Medienvielfalt im Mathematikunterricht. WWW: http://www.mathe-online.at/projekte/medienvielfalt.html (11-03-16)

Embacher, F. & Oberhuemer, P. (2009c). Über mathe online. WWW: http://www.mathe-online.at/ueber.html (11-04-15)

Embacher, F., Heugl, H. & Hohenwarter, M. (2006a). Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Teil 1. Vorwort. WWW: http://www.austromath.at/medienvielfalt (11-02-16)

Embacher, F., Heugl, H. & Hohenwarter, M. (2006b). Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Teil 7. Zusammenfassung und Ausblick. WWW: http://www.austromath.at/medienvielfalt (11-02-16)

Haarmann, D. & Kalb, P. E. (1999). Veränderte Kindheit – veränderte Erziehungsziele. In D. Haarmann & P.E. Kalb (Hrsg.), Grundschule 2000 – Lernen und leben im neuen Jahrtausend (S. 50-51). Weinheim: Beltz Verlag

Hauser, S. (2004). Computergestützter Erwerb von Lernstrategien. Vergleich der Erfassung habitueller und situationaler Lernstrategien und der Einfluss adaptiver Prompts auf Lernaktivitäten beim komplexen Lernen. WWW: http://www.psychologie.uni-freiburg.de/signatures/hauser/Hauser-Diplomarbeit.pdf (11-03-15)

Heimlich, K. (2009). Interaktive Lernpfade zum Thema „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen“. WWW: http://wikis.zum.de/dmuw/images/5/52/Lernpfad_brüche.pdf (2011-04-21)

Herold, C. & Herold, M. (2010). Die Gestaltungsprinzipien für SOL-Lernsettings. Die acht Prinzipien. WWW: http://www.sol-institut.de/unsere-grundlagen/lernsettings/ (2011-04-20)

Herold, C. & Herold, M. (2010). Selbstorganisiertes Lernen. Abgrenzung und Definition. WWW: http://www.sol-institut.de/unsere-grundlagen/selbstorganisiertes-lernen/ (2011-04-20)

Herold, M. & Landherr, B. (2003). SOL – Selbstorganisiertes Lernen. Ein systemischer Ansatz für Unterricht. WWW: http://erwachsenenbildung.at/themen/neue_lernformen/online-dokumente_datenbankabfrage_neuelernformen.php?s%5Btag1%5D=selbstlerneninderschule (2011-04-19)

Heugl, H., Wegscheider, W. & Klinger, W. (1992). Was ist ACDCA?. WWW: http://rfdz.ph-noe.ac.at/acdca/was-ist-das-acdca.html (11-03-16)

Hischer, H. (2001). Integrative Medienpädagogik – auch bedeutsam für den Mathematikunterricht? W. Herget & R. Sommer (Hrsg.), In Lernen im Mathematikunterricht mit Neuen Medien. (S. 80 -82). Hildesheim: Franzbecker

Hischer, H. (2002). Mathematikunterricht und Neue Medien – oder: Bildung ist das Paradies. WWW: http://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint67.pdf (2011-04-16)

Hohenwarter, J. & Hohenwarter, M. (2011). Einführung in GeoGebra. WWW: http://www.geogebra.org/book/intro-de.pdf (2011-04-18)

Hohenwarter, M. (2007). WWW. http://www.geogebra.org/de/wiki/index.php/GeoGebra (11-03-

01)

Hunneshagen, H. (2005). Innovation Schule. Identifizierung implementationsfördernder und – hemmender Bedingungen des Einsatzes neuer Medien. Münster: Waxmann Verlag

Kammer für Arbeiter und Angestellte für Wien. (2011). eLEARNING. Ideen, Begriffe, Infos. Ein Leitfaden zur Orientierung. WWW: http://www.arbeiterkammer.at/bilder/importiert/elearning_leitfaden.pdf (2011-04-19)

Klieme, E. (2004). Was sind Kompetenzen und wie lassen sie sich messen? WWW: http://kooperation.schule.bayern.de/pub/bscw.cgi/d2068909/Was%sind%20Kompetenzen%4F.pdf (2011-04-04)

Klinger, W. & Wegscheider, W. (2005). Elektronische Lernmedien im Mathematikunterricht (Projekt CA V). WWW: http://www.acdca.ac.at/projekt5/01allgem.pdf (11-03-01)

Klinger, W. & Wegscheider, W. (2006). Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Teil 2. Allgemeine Beschreibung des Forschungsprojekts. WWW: http://www.austromath.at/medienvielfalt (11-02-16)

Klinger, W. & Wegscheider, W. (2006). Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Teil 3. Projektdurchführung. WWW: http://www.austromath.at/medienvielfalt (11-02-16)

Klippert, H. (2004). Eigenverantwortliches Arbeiten und Lernen. Bausteine für den Fachunterricht. Weinheim und Basel: Beltz Verlag

Lehmann, B. (2002). E-Learning: Konzeption und Erfahrung mit netzbasiertem Lehren und Lernen. In B. Lehmann & E. Bloh (Hrsg.), Grundlagen der Berufs- und Erwachsenenbildung (S. 323 – 340). Hohengehren: Schneider Verlag

Leitgeb, M. (2009). Wissenstest und Evaluationsentwicklung von Lernpfaden – Medienvielfalt im Mathematikunterricht Längsschnitt „funktionale Abhängigkeiten“ (Sekundarstufe I). WWW: http://othes.univie.ac.at/5663/1/2009-07-13_0207490.pdf (2011-04-12)

Leuders, T. (2010). Mathematik Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelson Verlag Scriptor.

Lindner, A., Hohenwarter, M., Himmelbauer, T. & Dorfmayr, A. (2006). Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Teil 4. Lernpfad in der Vektorrechnung Teil 1. WWW: http://www.austromath.at/medienvielfalt (11-02-26)

Linnemann, T. (2006). Leitprogramm Vektorgeometrie. WWW: http://home.datacomm.ch/tolinnemann/leitprogrammvektoren.pdf (11-03-30)

Malle, G. (2007). Das Vektorkonzept in „Mathematik verstehen“. WWW: http://www.mat.univie.ac.at/~mv/dokumente/vektorkonzept.pdf (11-03-23)

Meiser, W. (2011). Seminare. WWW: http://www.fpmeiser.de/html/Seminare.html (11-05-15)

Meyer, H. (1995). Unterrichtsmodell II. Praxisband. Frankfurt am Main: Cornelson

Müller, U. & Iberer, U. (2002). Warum eine neue Lernkultur. WWW: http://www.neue-lernkultur.de/neuelernkultur.php?aspekt=warum (2011-04-19)

Oberhuemer, P., Stepancik, E., Reichl, M. & Embacher, F. (2010a). Workshop-Outline. Didaktik der Lernpfade. WWW: http://www.mathe-online.at/monk/workshops/didaktikLernpfade.html (2011-04-21)

Oberhuemer, P., Stepancik, E., Reichl, M. & Embacher, F. (2010b). Unterrichtsvorbereitung. Didaktische Gestaltung von Lernpfaden. WWW: http://www.mathe-online.at/monk/tipps/didaktik.html (2011-04-21)

Peschel, F. (2002). Offener Unterricht. Idee, Realität, Perspektive und ein praxiserprobtes Konzept zur Diskussion – Teil I. Allgemeindidaktische Überlegungen. Hohengehren: Schneider Verlag

Siller, H. S. (2008a). Bildungsstandards aus dem Fach Mathematik am Ende der 4. und 8. Schulstufe – Eine kurze Übersicht über den aktuellen Entwicklungsstand. WWW: http://www.mathematikunterricht.at/Newsletter/Newsletter_einzeln/Newsletter1/2.pdf (11-04-04)

Siller, H.-St. (2008b). Bildungsstandards im Fach Mathematik. Das mathematische Konzeptmodell – eine (kompakte) Handreihung für LehrerInnen. WWW: http://schule.salzburg.at/e3pi/ahshandreichungen/Bildungsstandards_in_Mathematik_V2.pdf (11-04-04)

Stangl, W. (2011a). Unterrichtsformen. Gruppenpuzzle. WWW: http://www.stangl-taller.at/ARBEITSBLAETTER/LEHREN/Unterrichtsformen.shtml (2011-05-04)

Stangl, W. (2011b). eLearning, E-Learning, Blended Learning. WWW: http://arbeitsblaetter.stangl-taller.at/LERNEN/Elearning.shtml (2011-04-19)

Stepancik, E. (2004). Didaktik der Lernpfade. Workshop der 9. Internationalen Tagung über Schulmathematik: Alternative Wege in Unterricht und Leistungsbeurteilung. WWW: http://www.mathe-online.at/monk/TU26.2.2004/didaktik01.pps (2011-04-21)

Stepancik, E. (2006). Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Teil 5. Allgemeine Evaluationsergebnisse und methodisch-didaktische Schlussfolgerungen. WWW: http://www.austromath.at/medienvielfalt (11-01-16)

Storz, R. (2009). Mathematik. Mathematikunterricht für die Sekundarstufe I kompetent planen durchführen und reflektieren. Berlin: Pro Business.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002). Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Berlin: Spektrum

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), Leistungsmessung in Schulen. Weinheim und Basel: Beltz.

Wikipedia. (2011). Teilgebiete der Mathematik. WWW: http://de.wikipedia.org/wiki/Teilgebiete_der_Mathematik (11-05-17)

ZUM. (2011a). Kompetenzen. WWW: http://wiki.zum.de/Kompetenzen (11-05-17)

ZUM. (2011b). Kompetenzorientiert unterrichten. WWW: http://wiki.zum.de/Kompetenzorientiert_unterrichten (11-04-05)